

Fachbereich 3 - Informatik

Bachelorarbeit

# Werkzeugbasierte Modellierung von Brettspielen mit Petri-Netzen am Beispiel von Mühle

**Autor:** Laura Kramer

**Datum:** 20. Juli 2021

**1. Gutachterin:** Dr. Sabine Kuske

**2. Gutachter:** Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Petri-Netze . . . . .	3
2.1.1	Netz . . . . .	3
2.1.2	Stellen/Transitions-System mit Kapazitäten . . . . .	4
2.1.3	Vor- und Nachbereich . . . . .	4
2.1.4	Schaltverhalten . . . . .	4
2.1.5	Erreichbarkeit und Erreichbarkeitsgraph . . . . .	5
2.1.6	Inhibitoranten . . . . .	6
2.1.7	Prioritäten . . . . .	6
2.2	Mühle . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Modellierung von Mühle</b>	<b>8</b>
3.1	Das Spielbrett (Felder) . . . . .	8
3.2	Stein legen . . . . .	10
3.3	Erkennen einer Mühle . . . . .	11
3.4	Steine verschieben . . . . .	12
3.5	Springen . . . . .	13
3.6	Steine entfernen . . . . .	14
3.7	Mühlen öffnen . . . . .	15
3.8	Gewinnbedingungen . . . . .	16
3.8.1	Startmarkierung . . . . .	17
3.8.2	Zusammenführung und Überblick . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Simulation in PIPE</b>	<b>21</b>
4.1	PIPE . . . . .	21
4.2	Simulations-Beispiele . . . . .	23
4.2.1	Stein legen . . . . .	23
4.2.2	Mühlen öffnen . . . . .	24
4.3	Simulation von Abläufen . . . . .	26
4.3.1	Stein legen vs ziehen . . . . .	26
4.3.2	Teilzug von Stein verschieben bis Siegbedingung . . . . .	29

4.3.3	Blockieren des Gegenspielers . . . . .	37
4.4	Weitere Fälle . . . . .	39
4.4.1	Zwei Mühlen mit einem Stein schließen . . . . .	39
4.4.2	Stein aus einer Mühle entfernen . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>46</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>49</b>
	<b>Anhang</b>	<b>52</b>

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und vorher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Arbeiten anderer Autoren entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Es wurden keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet.

Unterschrift:

Ort, Datum:

# Kapitel 1

## Einleitung

Petri-Netze wurden von Carl Adam Petri entwickelt (Petri (1962)) und werden in vielen Gebieten zur Modellierung eingesetzt, wie z.B. für Geschäftsprozesse oder für verteilte Systeme in der IT. Durch die Möglichkeit, nebenläufige, nichtdeterministische und verteilte Systeme darzustellen, bieten sich für Petri-Netze vielfältige Anwendungsmöglichkeiten. Die Vermutung liegt nahe, dass sie sich auch für die Modellierung von Brettspielen eignen. Werden die Stellen eines Petri-Netzes als Spielfelder des Spielbretts interpretiert, könnten die auf den Feldern abgelegten Spielsteine durch Marken in den Stellen repräsentiert werden. Die Spielzüge, die den Aufenthaltsort der Steine auf dem Brett ändern und die verschiedenen Prüfungen, ob z.B. ein Stein geschlagen wurde (wie bei Mensch-ärgere-dich-nicht) oder eine Mühle geschlossen wurde, könnten durch Transitionen dargestellt werden. Veröffentlichungen zur Modellierung von Spielen mit Petri-Netzen befassen sich eher mit Videospiele (z.B. Araújo und Roque (2009)) und es finden sich nur wenige Ansätze für Brettspiele (z.B. Scheetz (2016)). Diese Fallstudie soll daher dazu dienen, die Datenlage zur Modellierung von Brettspielen zu erweitern.

Bei Mühle handelt es sich um ein scheinbar einfaches Brettspiel: Die Regeln lassen sich in wenigen Minuten erlernen, es wird von nur zwei Personen gespielt und das Spiel findet auf einem begrenzten Spielfeld mit nur 24 Feldern und neun Spielsteinen pro Spieler statt. Die Zugmöglichkeiten sind auf das Ablegen, Verschieben, Springen und Entfernen von Steinen beschränkt. Verglichen mit Brettspielen wie Schach oder Go sind sie daher sehr gering. Trotzdem gibt es viele verschiedene Zugmöglichkeiten. Der erste Spieler hat 24 Möglichkeiten, seinen ersten Stein auf dem Spielbrett abzulegen und sobald ein Spieler in der Lage ist, mit seinen Steinen zu springen, steigen die Zugmöglichkeiten stark an. Nichtdeterminismus ist daher bei der Modellierung des Spiels hilfreich, um die Komplexität zu verringern. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, den Umfang der Modellierung eines scheinbar simplen Spiels zu überprüfen. Zudem soll geprüft werden, ob Werkzeuge zur Erstellung von Petri-Netzen dabei helfen können, die Abläufe in so einem System zu visualisieren und dadurch auf Korrektheit zu prüfen.

Auf der Internetseite “Petri Nets World” (*Petri Nets World* (o. J.)) findet sich neben vielen weiteren Informationen über Petri-Netze auch eine Datenbank, in der Werkzeuge zur

Modellierung und Analyse aufgelistet sind und die nach gewünschten Funktionen durchsucht werden kann. Für diese Arbeit wurde das Werkzeug PIPE ausgesucht, das u.A. Möglichkeiten zur Simulation und zur Bestimmung von Erreichbarkeitsgraphen bietet. Es ist einfach zu bedienen und frei verfügbar.

## **Aufbau der Arbeit**

Die Arbeit gliedert sich neben Einleitung und Fazit in drei Hauptkapitel. Im nächsten Kapitel werden sowohl die benötigten Grundlagen für Petri-Netze, sowie der Ablauf des Mühle-Spiels erklärt. Das dritte Kapitel stellt die Modellierung des Spiels als Stellen-Transitions-System mit Kapazitäten vor. Im vierten Kapitel wird das Werkzeug PIPE vorgestellt und die Modellierung in PIPE getestet. Anhand einiger einfacher und komplexer Fälle wird die Korrektheit der Abläufe innerhalb der Modellierung überprüft. Das letzte Kapitel fasst die Ergebnisse zusammen und gibt einen Überblick über Ansätze, wie die vorhandene Modellierung sowohl vereinfacht werden kann, indem weitere Methoden verwendet werden, wie auch erweitert werden kann, um Sonderfälle und Strategien abzudecken.

# Kapitel 2

## Grundlagen

Petri-Netze sind Modelle, mit denen Abläufe in Systemen übersichtlich dargestellt und analysiert werden können. Sie eignen sich besonders, um nebenläufige Aktivitäten darzustellen.

### 2.1 Petri-Netze

Eine spezielle Form der Petri-Netze sind die Stellen/Transitions-Systeme (S/T-System, STS), die mit der Ergänzung von Kapazitäten, Inhibitoranten und Prioritäten in dieser Modellierung verwendet werden.

Die im Folgenden verwendeten Definitionen basieren auf dem Skript zur Veranstaltung Petri-Netze an der Universität Bremen im Wintersemester 2020/2021 von Kuske (2020), das sich im Wesentlichen auf die Arbeiten von Rozenberg und Engelfriet (1996), Starke (1990), Priese und Wimmel (2008), Reisig (2010) und Best und Wimmel (2013) stützt. Kapazitäten, Inhibitoranten und Prioritäten werden im Skript nicht behandelt, daher basieren die Erklärungen hierfür direkt auf Priese und Wimmel (2008).

#### 2.1.1 Netz

Ein Netz besteht aus einer endlichen Menge von Stellen, einer endlichen Menge von Transitionen und einer Flussrelation, die Stellen und Transitionen durch gerichtete Kanten miteinander verbindet. Der Schnitt der Stellen- und Transitions-Mengen ist leer.

**Definition 2.1 Netz** Ein Netz ist ein 3-Tupel  $N = (S, T, F)$  mit

- einer endlichen Menge von Stellen  $S$ ,
- einer endlichen Menge von Transitionen  $T$ , wobei  $S \cap T = \emptyset$  und
- einer Flussrelation  $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$ .

### 2.1.2 Stellen/Transitions-System mit Kapazitäten

Ein Stellen/Transitions-System mit Kapazitäten besteht aus einem Netz, einer Gewichtsfunktion, die jeder Kante ein Gewicht zuordnet, einer Kapazitätsfunktion, die jeder Stelle eine Kapazität zuordnet und einer Startmarkierung, die jeder Stelle eine Menge von Marken (Tokens) zuordnet.

**Definition 2.2 Stellen/Transitions-System mit Kapazitäten** Ein Stellen/Transitions-System mit Kapazitäten ist ein 5-Tupel  $STS = (S, T, F, W, \kappa, M_0)$ , wobei

- $(S, T, F)$  ein Netz entsprechend Definition 2.1 ist,
- $W: F \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$  eine Abbildung ist, die jeder Kante eine positive natürliche Zahl als Gewicht zuordnet,
- $\kappa: S \rightarrow \mathbb{N}$  eine Abbildung ist, die jeder Stelle eine positive natürliche Zahl als Kapazität zuordnet und
- $M_0: S \rightarrow \mathbb{N}$  eine Abbildung ist, die jeder Stelle eine Anzahl von Marken zuordnet, die Startmarkierung.

**Definition 2.3 Markierung** Sei  $STS = (S, T, F, W, \kappa, M_0)$  ein S/T-System mit Kapazitäten. Eine Markierung von  $STS$  ist eine Abbildung  $M: S \rightarrow \mathbb{N}$

### 2.1.3 Vor- und Nachbereich

Der Vorbereich einer Stelle sind die Transitionen, die über eingehende Flusskanten mit ihr verbunden sind. Der Nachbereich einer Stelle sind alle Transitionen, die über ausgehende Flusskanten mit ihr verbunden sind. Analog sind auch Vor- und Nachbereich von Transitionen definiert als Menge der über ein- bzw. ausgehende Flusskanten verbundenen Stellen. Einzelne Elemente dieser Mengen werden als Vor- bzw. Nachstellen bezeichnet.

**Definition 2.4 Vor- und Nachbereich** Für  $x \in S \cup T$  bezeichnet

- $\bullet x = \{y \in S \cup T \mid (y, x) \in F\}$  den Vorbereich von  $x$  und
- $x^\bullet = \{y \in S \cup T \mid (x, y) \in F\}$  den Nachbereich von  $x$ .

### 2.1.4 Schaltverhalten

Enthält jede Vorstelle einer Transition mindestens so viele Marken wie die Gewichtung der Kante von dieser Stelle zur Transition und enthält jede Nachstelle einer Transition maximal so viele Marken, wie die Kapazität dieser Stelle minus dem Gewicht der Kante von der Transition zu dieser Stelle, dann ist die Transition aktiviert.



**Definition 2.5 M-aktivierte Transition** Sei  $STS = (S, T, F, W, \kappa, M_0)$  ein S/T-System mit Kapazitäten und  $M: S \rightarrow \mathbb{N}$  eine Markierung. Dann heißt eine Transition  $t \in T$  M-aktiviert ( $M[\cdot]$ ), wenn für alle  $s \in \bullet t$  gilt, dass  $M(s) \geq W(s, t)$  und für alle  $s \in t^\bullet$  gilt, dass  $M(s) \leq \kappa(s) - W(s, t)$ .

Beim Schalten einer Transition werden aus jeder Vorstelle der Transition so viele Marken entfernt, wie dem Gewicht der Kante zwischen Stelle und Transition entsprechen und in jede Nachstelle so viele Marken gelegt, wie dem Gewicht der Kante zwischen Transition und Stelle entsprechen.

**Definition 2.6 Schalten einer Transition** Sei  $STS = (S, T, F, W, \kappa, M_0)$  ein S/T-System mit Kapazitäten und seien  $M, M' : S \rightarrow \mathbb{N}$  Markierungen. Dann schaltet eine M-aktivierte Transition  $t \in T$  von  $M$  nach  $M'$  ( $M[\cdot]M'$ ), wenn:

$$M'(s) = \begin{cases} M(s) - W(s, t), & \text{falls } s \in \bullet t \setminus t^\bullet \\ M(s) + W(t, s), & \text{falls } s \in t^\bullet \setminus \bullet t \\ M(s) - W(s, t) + W(t, s), & \text{falls } s \in \bullet t \cap t^\bullet \\ M(s), & \text{sonst} \end{cases}$$

Im vierten Kapitel werden zusätzlich zur Simulation zwei Erreichbarkeitsgraphen betrachtet. Für die Erreichbarkeit müssen zunächst Schaltfolgen definiert werden.

**Definition 2.7 Schaltfolge** Sei  $STS = (S, T, F, W, \kappa, M_0)$  ein S/T-System mit Kapazitäten. Dann:

- Für jede Markierung  $M : S \rightarrow \mathbb{N}$  ist das leere Wort  $\lambda$  eine Schaltfolge von  $M$  nach  $M$  ( $M[\lambda]M$ ).
- Seien  $M, M', M'' : S \rightarrow \mathbb{N}$  Markierungen von STS, sei  $w \in T^*$   $M[w]M'$  und sei  $t \in T$   $M'[t]M''$ . Dann  $M[wt]M''$ .

## 2.1.5 Erreichbarkeit und Erreichbarkeitsgraph

**Definition 2.8 Erreichbare Markierungen** Sei  $STS = (S, T, F, W, \kappa, M_0)$  ein S/T-System mit Kapazitäten und seien  $M, M' : S \rightarrow \mathbb{N}$  Markierungen von STS.  $M'$  heißt erreichbar von  $M$  ( $M[\cdot]M'$ ), wenn es eine Schaltfolge  $w \in T^*$  gibt, so dass  $M[w]M'$ .  $Reach(M) = \{M' : S \rightarrow \mathbb{N} \mid M[\cdot]M'\}$  bezeichnet die Menge der von  $M$  zu erreichenden Markierungen.

**Definition 2.9 Erreichbarkeitsgraph** Sei  $STS = (S, T, F, W, \kappa, M_0)$  ein S/T-System mit Kapazitäten. Dann ist der Erreichbarkeitsgraph von STS der Graph  $G(STS) = (V, E)$  mit der Knotenmenge  $V = Reach(STS)$  und der Kantenmenge  $E = \{(M, t, M') \in V \times T \times V \mid M[t]M'\}$ .

## 2.1.6 Inhibitorkanten

Inhibitorkanten werden dafür genutzt, um zu prüfen, ob eine Stelle unmarkiert ist. Ein Stellen-Transitions-System mit Inhibitorkanten enthält zusätzlich eine Abbildung  $inh : T \rightarrow 2^S$ , die jeder Transition  $t$  eine Menge von Stellen zuweist. Zusätzlich zu den definierten Voraussetzungen für die Aktiviertheit einer Transition  $t$  wird noch geprüft, ob alle Stellen in  $inh(t)$  leer sind.

## 2.1.7 Prioritäten

Transitionen können Prioritäten zugeordnet werden, um Einfluss auf die Schaltfolge zu nehmen. Sind zwei Transitionen  $t_1, t_2$  aktiviert, dann schaltet die Transition mit der höheren Priorität zuerst.

Ein STS mit Prioritäten hat zusätzlich eine irreflexive, transitive Relation  $> \subseteq T \times T$ , die den Transitionen Prioritäten zuordnet.

## 2.2 Mühle

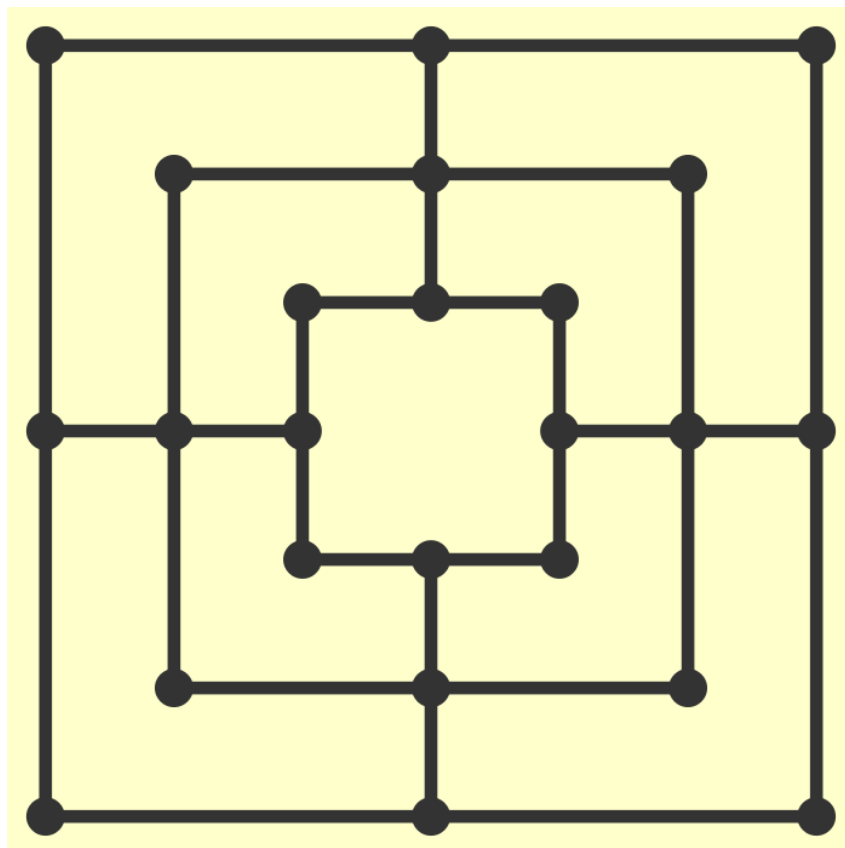


Abbildung 2.1: Das Mühle-Spielbrett

Mühle ist ein Brettspiel für zwei Spieler. Das Spielbrett besteht aus drei konzentrischen Quadraten, die in der Mitte ihrer Seiten über Linien verbunden sind, siehe Abb. 2.1 (Bild-Quelle: Elembis (2006)). Jeder Spieler erhält neun gleichfarbige Spielsteine in schwarz oder

weiß. Ziel des Spiels ist es, mit den eigenen Spielsteinen eine Mühle (drei Steine in einer Reihe) zu legen, um einen Spielstein des Gegners zu entfernen oder die Steine seines Gegners so zu blockieren, dass dieser nicht mehr ziehen kann. Das Spiel endet, wenn ein Spieler nur noch zwei Spielsteine auf dem Brett hat oder mehr als drei Steine auf dem Brett hat und keinen gültigen Zug mehr ausführen kann. Ein gegnerischer Stein darf nicht vom Spielbrett entfernt werden, wenn er sich innerhalb einer Mühle befindet.

Das Spiel unterteilt sich in drei Phasen:

- **Setzphase:** Die Spieler setzen abwechselnd ihre Steine auf die markierten Felder des Spielbretts. Hier können bereits Mühlen geschlossen und Steine des Gegners entfernt werden.
- **Zugphase:** Wenn jeder Stein entweder auf dem Brett oder ausgeschieden sind, können die vorhandenen Steine gezogen werden, d.h. auf einen angrenzenden, nicht belegten Punkt gezogen werden.
- **Endphase:** Hat ein Spieler nur noch drei Steine auf dem Brett, darf er mit diesen springen, d.h. auch auf nicht angrenzende, freie Punkte legen.

Im Spielablauf gibt es noch zwei besonders zu betrachtende Fälle:

- In der Setzphase ist es möglich, dass ein Spieler zwei Mühlen gleichzeitig mit einem Stein schließt. In diesem Fall darf trotzdem nur ein gegnerischer Stein entfernt werden.
- Die offiziellen Turnierregeln erlauben einen weiteren Spezialfall: Darf Spieler A einen Stein von Spieler B entfernen, aber alle Steine von Spieler B befinden sich in Mühlen, dann darf Spieler A einen Stein aus einer Mühle entfernen. Die Verwendung dieser Regel ist regional unterschiedlich geregelt.

Diese Sonderfälle werden in der Modellierung nicht betrachtet, aber im Kapitel zur Simulation wird jeweils ein Ansatz vorgestellt, um zu zeigen, wie die Fälle grundsätzlich abgedeckt werden könnten.

# Kapitel 3

## Modellierung von Mühle

Im Folgenden werden Ansätze zur Modellierung von Mühle als Stellen/Transitions-System in PIPE vorgestellt. Nach der Darstellung des Spielbretts werden alle benötigten Zugmöglichkeiten als Teilnetze betrachtet und am Ende schematisch mit Hilfe einer Übersichtsgrafik zusammengefügt. Eine Betrachtung der Prioritäten der Transitionen komplettiert die Modellierung.

### 3.1 Das Spielbrett (Felder)

Für das Spielbrett wird zunächst für jedes Feld, auf dem ein Spielstein liegen kann, eine Stelle verwendet (Abb 3.1). Um zu unterscheiden, welche Steine von welchem Spieler abgelegt wurden, werden diese 24 Stellen verdoppelt. Sie werden definiert als  $F_{i,j}$  mit  $F \in \{A, B\}$  für Spieler A und Spieler B,  $i \in \{1, 2, 3\}$  für die drei Quadrate des Spielbretts und  $j \in \{1, \dots, 8\}$  für die acht Felder eines Quadrats. Die Nummerierung dieser acht Felder erfolgt im Uhrzeigersinn, beginnend in der oberen linken Ecke jedes Quadrats.  $i$  und  $j$  werden in den folgenden Abschnitten auch für Transitionen verwendet und sind dort gleich definiert.

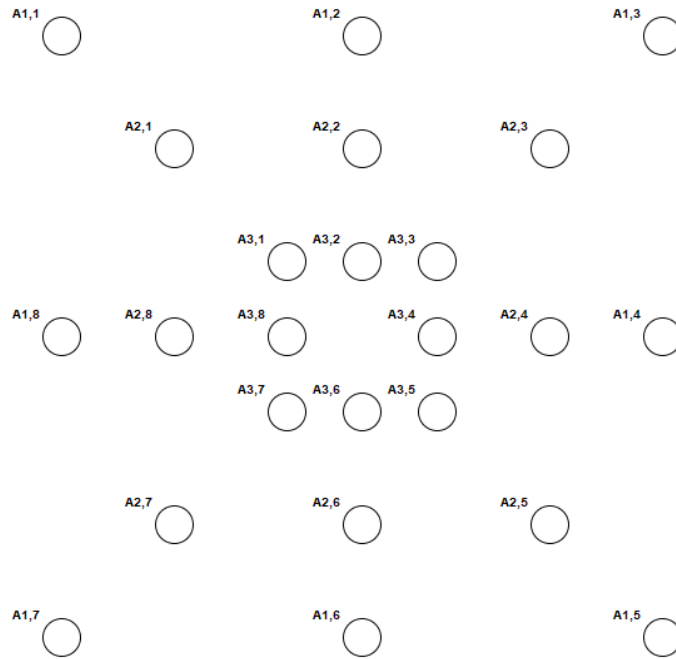


Abbildung 3.1: Die 24 Felder des Spielbretts als Stellen für Spieler A

Für das Legen von Spielsteinen im ersten Schritt werden Marken verwendet, die den Stellen hinzugefügt werden. Ein beispielhaftes Spielbrett mit mehreren gelegten Steinen und einer Mühle ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

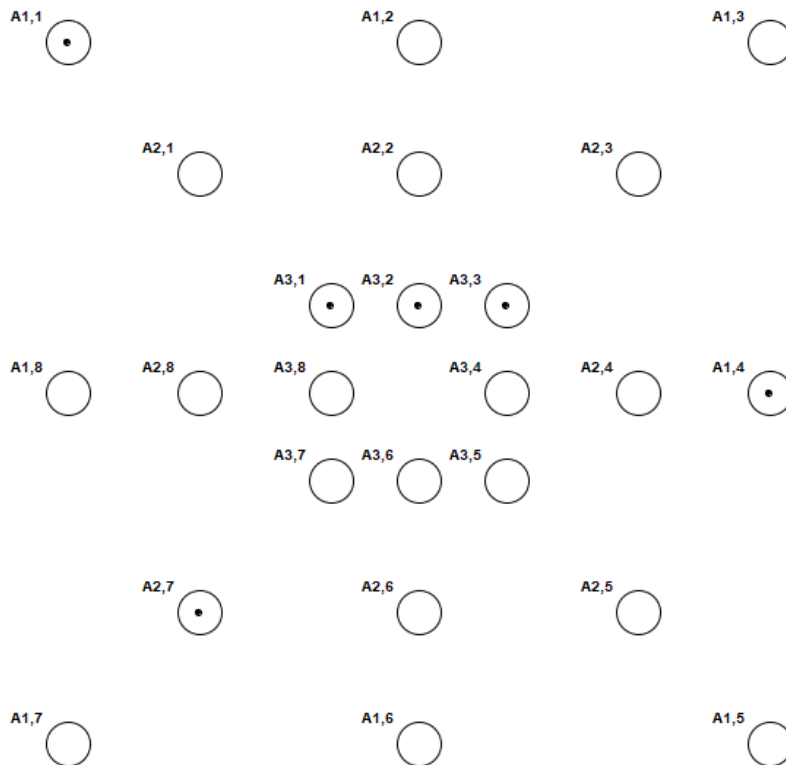


Abbildung 3.2: Das Spielbrett von Spieler A mit belegten Feldern

## 3.2 Stein legen

Zu Beginn des Spiels enthält keine der Stellen des Spielbretts Marken (siehe auch Abschnitt 3.8.1 für die Startmarkierung). Für jeden Spieler gibt es eine Stelle (“A-Steine” bzw. “B-Steine”), die für jeden noch nicht gelegten Spielstein eine Marke enthält. Dies wird in PIPE durch die Angabe “ $k=9$ ” neben der Stelle angezeigt.

Als Beispiel wird ein Ausschnitt des Brettes von Spieler A betrachtet (Abb. 3.3). Ist Spieler A am Beginn seines Zuges, repräsentiert durch eine Marke in der Stelle “A-Stein legen”, und befinden sich noch Marken in der Stelle “A-Steine”, so kann ein Feld auf dem Spielbrett belegt werden, wenn es nicht bereits von Spieler B belegt wurde. Alle Transitionen zum Legen von Steinen sind nach dem Muster  $f_{i,j}$  benannt, wobei  $f \in \{a, b\}$  sein kann für Spieler A und Spieler B und  $i$  und  $j$  die Werte des Spielfelds haben, auf den ein Stein gelegt werden soll.

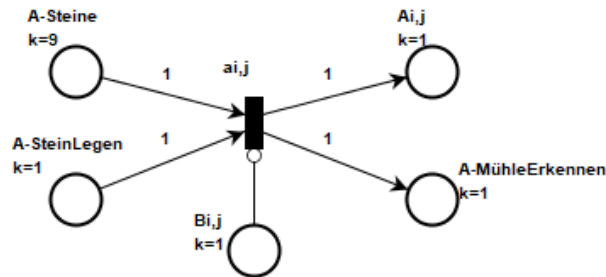


Abbildung 3.3: Ein möglicher Spielzug als S/T-System.  $k$  gibt die Kapazität einer Stelle an.

Die Stelle A-MühleErkennen wird beim Legen, Verschieben und Springen von Steinen verwendet, um zu erkennen, ob eine neue Mühle geschlossen wurde.

Hat Spieler A bereits alle seine Steine abgelegt, schaltet alternativ die Transition A-SteinLegenUnmöglich (Abb. 3.4) und es wird eine Marke in die Stelle A-P2 gelegt.

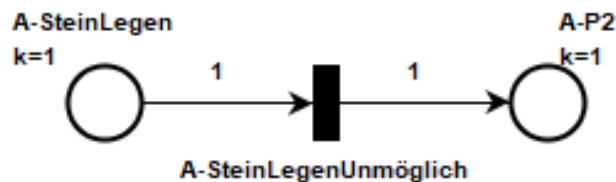


Abbildung 3.4: Spieler A hat bereits alle seine Steine abgelegt. Die Phase zum Setzen von Steinen wird übersprungen.

Die Markierung der Stelle A-P2 aktiviert die zweite Phase des Zuges (P2), in der je nach übrigen Steinen verschoben oder gesprungen werden kann.

### 3.3 Erkennen einer Mühle

Eine Mühle besteht aus drei belegten Stellen nach den Schemata

- $\{F_{i,j}, F_{i,j+1}, F_{i,j+2}\}$  mit  $F \in \{A, B\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  und
- $\{F_{i,7}, F_{i,8}, F_{i,1}\}$  mit  $F \in \{A, B\}$  und  $i \in \{1, 2, 3\}$  oder
- $\{F_{1,j}, F_{2,j}, F_{3,j}\}$  mit  $j \in \{2, 4, 6, 8\}$

Legt ein Spieler einen Stein auf das Brett, sodass für ihn eine Mühle entsteht, darf er einen Stein seines Gegners vom Spielbrett entfernen, solange dieser nicht ebenfalls Teil einer Mühle ist. In Abb. 3.5 ist der Mechanismus zum Erkennen einer von Spieler A geschlossenen Mühle beispielhaft dargestellt. Sind die Felder A3,1, A3,2, A3,2 und A-MühleErkennen belegt, dann ist die Transition am3,1-3 aktiviert. Diese legt eine Marke in M3,1-3, was bedeutet, dass die Mühle geschlossen ist. Gleichzeitig legt sie jeweils eine Marke in A3,1, A3,2 und A3,3, da die Spielsteine auf dem Feld bleiben müssen. Eine weitere Marke wird in die Stelle A-SteinEntfernen gelegt. Dies ermöglicht Spieler A, einen Stein von Spieler B vom Brett zu entfernen, siehe Abschnitt 3.6.

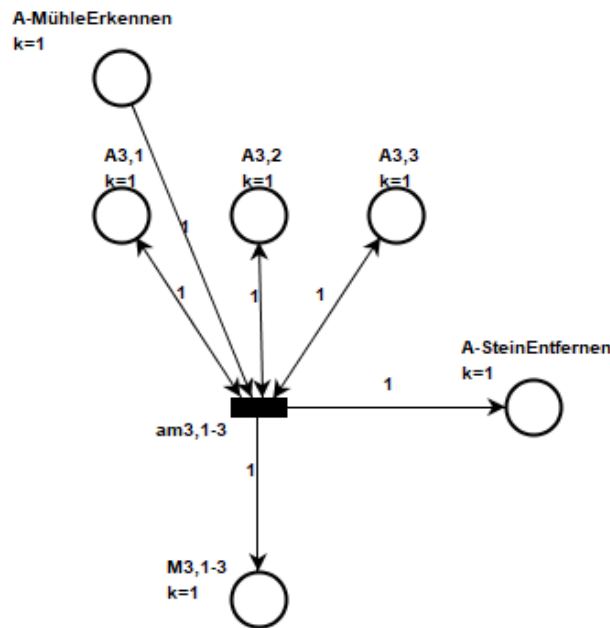


Abbildung 3.5: Erkennen einer Mühle mittels einer “M”-Stelle

Die Stellen für Mühlen werden nach dem Muster  $M_{i,j1-j3}$  für Mühlen innerhalb eines Quadrats bzw.  $M_{i1-i3,j1}$  für Mühlen die sich über alle Quadrate spannen benannt.  $i1-i3$  und  $j1-j3$  sind dabei immer drei in einer Reihe liegende Felder.

Das Hinzufügen eines Spielsteins kann potentiell immer zwei Mühlen schließen. Für das Feld A3,2 kann z.B. neben der Mühle M3,1-3 auch die Mühle M1-3,2 geschlossen werden. Die Mühle M3,1-3 bleibt belegt, bis ein Verschieben oder Springen von Steinen dazu führt,

dass sie wieder geöffnet wird. Dies wird in den Abschnitten 3.4, 3.5 und 3.7 beschrieben. Wurde keine Mühle erkannt, wird alternativ die entsprechende Transition  $F_{i,j}$ -keineMühleErkannt aktiv. In dem Fall, dass ein Stein auf das Feld  $A_{3,2}$  verschoben wurde, ist dies also die Transition  $A_{3,2}$ -keineMühleErkannt, siehe Abb. 3.6.

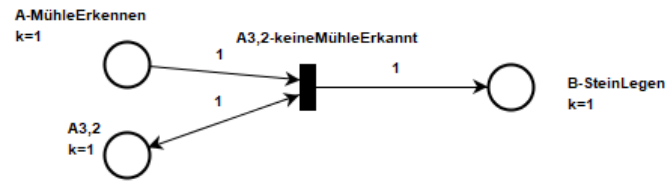


Abbildung 3.6: Wenn keine Mühle erkannt wurde, endet der Zug von Spieler A und Spieler B ist an der Reihe.

### 3.4 Steine verschieben

In der zweiten Phase des Spiels können die Spielsteine jeweils um ein Feld pro Zug verschoben werden. Dies erfolgt innerhalb eines Spielbrett-Quadrats nach den Schemata in den Abbildungen 3.7 und 3.8 mit  $F \in \{A, B\}$ ,  $f \in \{a, b\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $j \in \{1, \dots, 7\}$  oder von einem Quadrat in ein anderes, angrenzendes Quadrat nach dem Schema in Abb. 3.9 mit  $F \in \{A, B\}$ ,  $f \in \{a, b\}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  und  $j \in \{2, 4, 6, 8\}$ . In beiden Fällen ist  $f = a$ , wenn  $F = A$  und  $f = b$ , wenn  $F = B$ . Die Stelle A-P2 gibt an, dass sich Spieler A in der Phase des Spiels befindet, in der Steine verschoben werden können oder gesprungen werden kann. Die Kante von  $B_{i,j+1}$  zur Transition  $a_{i,j}$ - $a_{i,j+1}$  ist eine Inhibitorkante, erkennbar an der Kugelspitze.

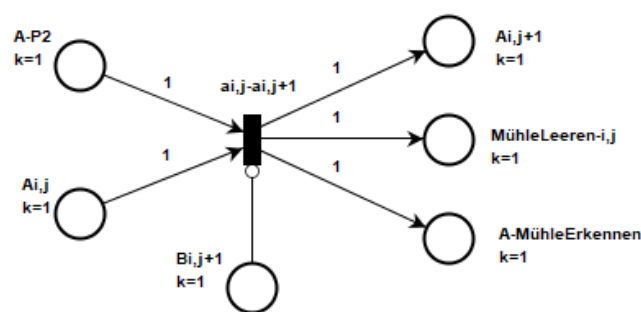


Abbildung 3.7: Schema 1 zum Verschieben von Spielsteinen innerhalb eines Quadrats



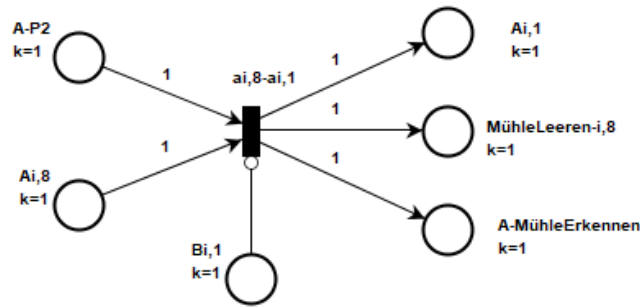


Abbildung 3.8: Schema 2 zum Verschieben von Spielsteinen innerhalb eines Quadrats

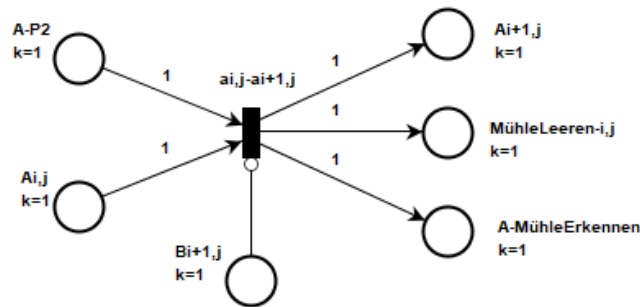


Abbildung 3.9: Schema zum quadratübergreifenden Verschieben von Spielsteinen

Das Verschieben eines Steins legt ebenfalls eine Marke in ein “MühleLeeren”-Feld. Dies dient dem Wechsel in den Abschnitt 3.7. Es wird geprüft, ob das Verschieben eine Mühle geöffnet hat.

Ist Spieler A nicht in der Lage, einen seiner Steine zu verschieben, wird alternativ die Transition A-ZugUnmöglich aktiviert (Abb. 3.10). Diese legt eine Marke in die Stelle Spielende: B-gewinnt, wodurch das Spiel endet.

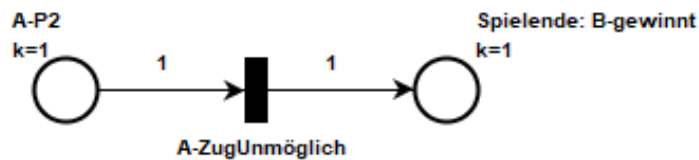


Abbildung 3.10: Schema zum Springen von Spielsteinen

### 3.5 Springen

In der zweiten Spielphase kann ein Spieler in seinem Zug alternativ zum Ziehen auch mit seinen Steinen auf jedes beliebige nicht belegte Feld springen, wenn er nur noch drei

verbliebene Spielsteine auf dem Brett hat. Das Springen erfolgt nach dem Muster in Abb. 3.11.

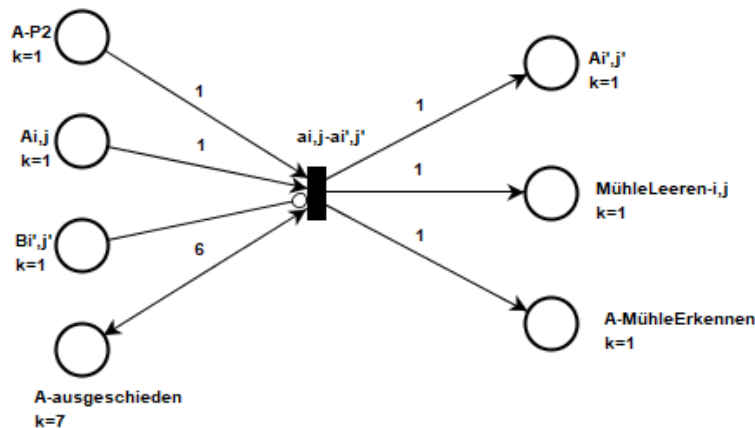


Abbildung 3.11: Schema zum Springen von Spielsteinen

Das Verschieben und Springen werden als eine Phase betrachtet, auch wenn es sich dem Spielablauf nach um zwei verschiedene Phasen handelt. Dies hat den Vorteil, dass weniger Transitionen für die Modellierung benötigt werden, da die Transitionen zum Steine Verschieben weiterhin genutzt werden können.

### 3.6 Steine entfernen

Hat ein Spieler eine Mühle geschlossen, darf er einen Stein seines Gegners entfernen. Dies erfolgt z.B. für Spieler A nach den Schemata in Abbildung 3.12 und 3.13. Ist die Stelle A-SteinEntfernen belegt, darf ein Stein von Spieler B entfernt werden. Ist es nicht möglich, eine der  $b_{i,j}$ -entfernen-Transitionen zu schalten, da alle Steine von Spieler B Teil einer Mühle sind, schaltet stattdessen die Transition A-SteinEntfernenUnmöglich und Spieler B ist am Zug.

Kann ein Stein des Gegenspielers entfernt werden, wird ein Token der Stelle B-ausgeschieden hinzugefügt.

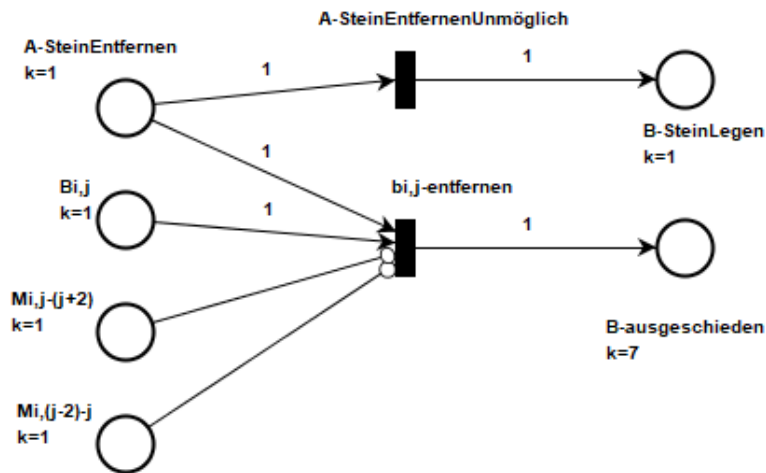


Abbildung 3.12: Schema 1 zum Entfernen von Spielsteinen für Spieler A

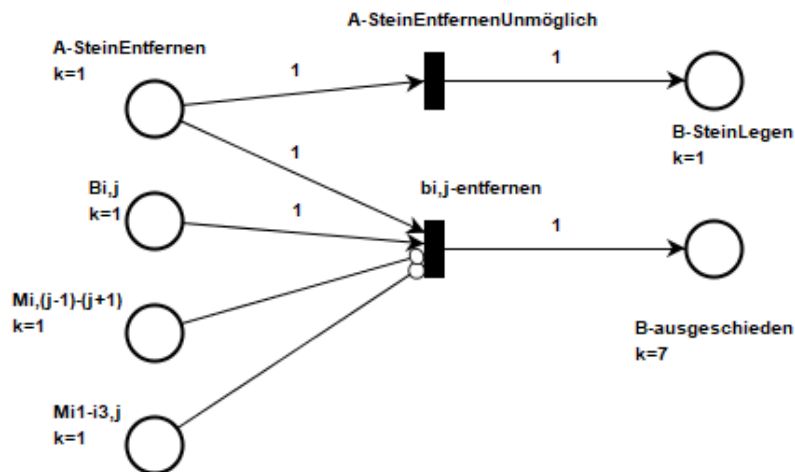


Abbildung 3.13: Schema 2 zum Entfernen von Spielsteinen für Spieler A

Die Unterschiede in den Abbildungen ergeben sich daraus, ob  $B_{i,j}$  ein Eckfeld oder ein mittleres Feld einer Reihe ist. Im ersten Fall entspricht  $i$  dem Index des Quadrats, auf dem sich die Reihe befindet.  $j - (j + 2)$  und  $(j - 2) - j$  sind nicht mathematisch zu verstehen, sondern bezeichnen die Punkte zwei Felder weiter im Uhrzeigersinn oder zwei Felder weiter gegen den Uhrzeigersinn von  $j$ . Für  $B_{1,1}$  wären das beispielsweise 1-3 und 7-1. Im zweiten Fall kann der Stein Teil einer Mühle über eine Reihe eines Quadrats sein oder Teil einer quadratübergreifenden Reihe.  $(j - 1)$  und  $(j + 1)$  bezeichnen hierbei die Felder vor und nach  $j$  innerhalb eines Quadrats.

### 3.7 Mühlen öffnen

Wurde die Position eines Steins auf dem Spielbrett verändert, muss geprüft werden, ob sich dadurch eine Mühle geöffnet hat. Daher kann der Netzabschnitt zum Öffnen einer

Mühle von zwei anderen Netzabschnitten aus erreicht werden: 3.4 und 3.5.

Das Öffnen von Mühlen erfolgt anhand der Schemata in Abbildungen 3.14 und 3.15. “MühleLeeren”-Stellen beinhalten den  $i, j$ -Index des Feldes, von dem gerade ein Stein entfernt wurde. Jedes Feld kann Teil von zwei Mühlen sein. Ist es Teil eines Eckfeldes, so werden analog dem Abschnitt 3.6 die zwei Reihen eines Quadrats geprüft, die dieses Feld beinhalten. Ist das Feld der mittlere Teil einer Reihe, werden diese und die quadratübergreifende Reihe geprüft. Die Transitionen  $mühleLeeren-i,j$  und  $zweiteMühleLeeren-i,j$  sind höher priorisiert als die Transitionen  $mühleLeer-i,j$  und  $zweiteMühleLeer-i,j$ , siehe dazu auch 3.8.2. Dadurch wird eine Mühle geöffnet, falls sie vorhanden ist. Ansonsten wird die nächste Mühle geprüft und evtl. geöffnet.

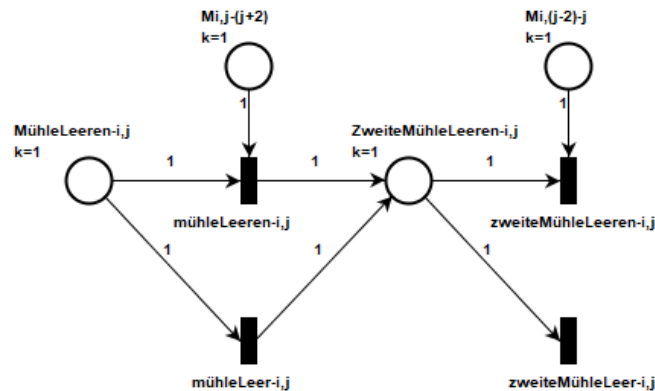


Abbildung 3.14: Schema 1 zum Öffnen von Mühlen und Leeren der zugehörigen “M”-Stellen

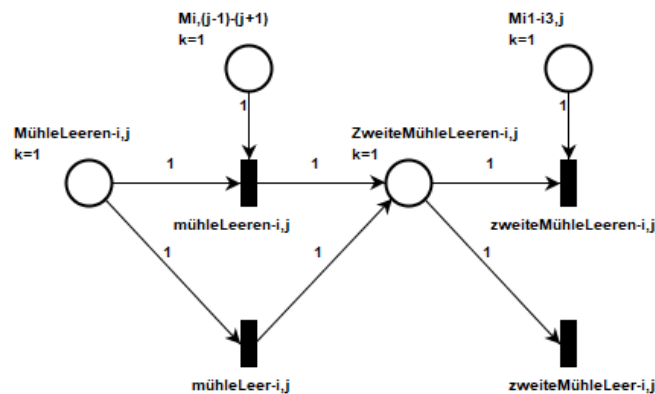


Abbildung 3.15: Schema 2 zum Öffnen von Mühlen und Leeren der zugehörigen “M”-Stellen

### 3.8 Gewinnbedingungen

Mühle kann auf zwei Arten gewonnen werden. Entfernt ein Spieler sieben Spielsteine des Gegners vom Brett, so kann dieser keine Mühlen mehr schließen und hat damit verlo-

ren. Dies kann einfach durch die Stellen A-ausgeschieden und B-ausgeschieden bestimmt werden, die für jeden entfernten Stein des Gegners ein Token erhalten. Wird ein siebtes Token hinzugefügt, so wird die Transition B-gewinnt bzw. A-gewinnt aktiviert und kann das Spiel beenden. (Abb. 3.16). Die Gewinnbedingung wird immer dann abgefragt, wenn ein Stein einer F-ausgeschieden-Stelle hinzugefügt wurde. Ist sie nicht erfüllt, ist der Zug des einen Spielers beendet und der andere Spieler ist an der Reihe.

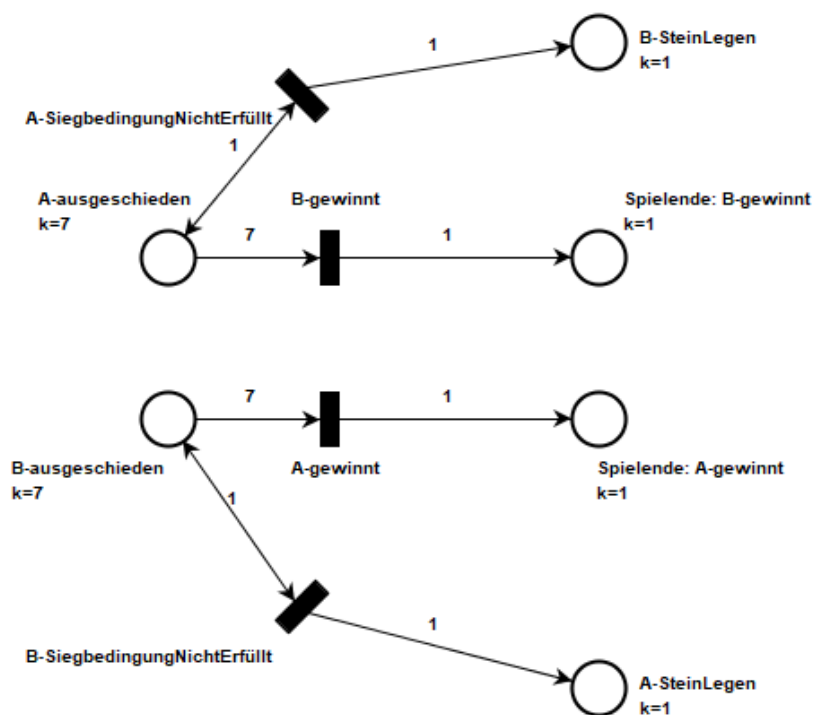


Abbildung 3.16: Enthält eine der F-ausgeschieden-Stellen sieben Marken, kann die entsprechende -gewinnt-Transition schalten und der Spieler gewinnt

Die zweite Möglichkeit das Spiel zu gewinnen besteht darin, den Gegner am Ziehen zu hindern. Dazu muss der Gegner noch mindestens vier Steine auf dem Brett haben, da er sonst springen kann. Der Spieler muss alle Zugmöglichkeiten gemäß der Schemata in Abschnitt 3.4 verhindern, so dass nur die in Abb. 3.10 gezeigte Alternative bleibt. Ist dies der Fall, kann durch die Transition A-ZugUnmöglich oder B-ZugUnmöglich eine Marke in die Stelle Spielende: B-gewinnt bzw. Spielende: A-gewinnt gelegt werden. Die beiden Transitionen müssen dafür niedriger priorisiert sein, als die Transition zum Verschieben.

### 3.8.1 Startmarkierung

Zu Beginn des Spiels enthalten die Stellen A-Steine und B-Steine jeweils neun Marken. Um das Spiel in Gang zu setzen muss jetzt nur noch eine Marke in das Feld *F*-SteinLegen gelegt werden, je nachdem, welcher Spieler beginnen soll. Damit ist die Startmarkierung

vollständig.

### 3.8.2 Zusammenführung und Überblick

In diesem Abschnitt sollen alle vorherigen Netzabschnitte schematisch zu einem Netz zusammengesetzt werden. Hierfür wird ein gesamter Spielzug für Spieler A betrachtet. Nach einem Durchlauf des Spielzugs hat entweder einer der Spieler gewonnen oder Spieler B ist an der Reihe und Abbildung 3.17 beginnt erneut ab dem Startpunkt, wobei alle Vorkommnisse von A und B vertauscht werden.

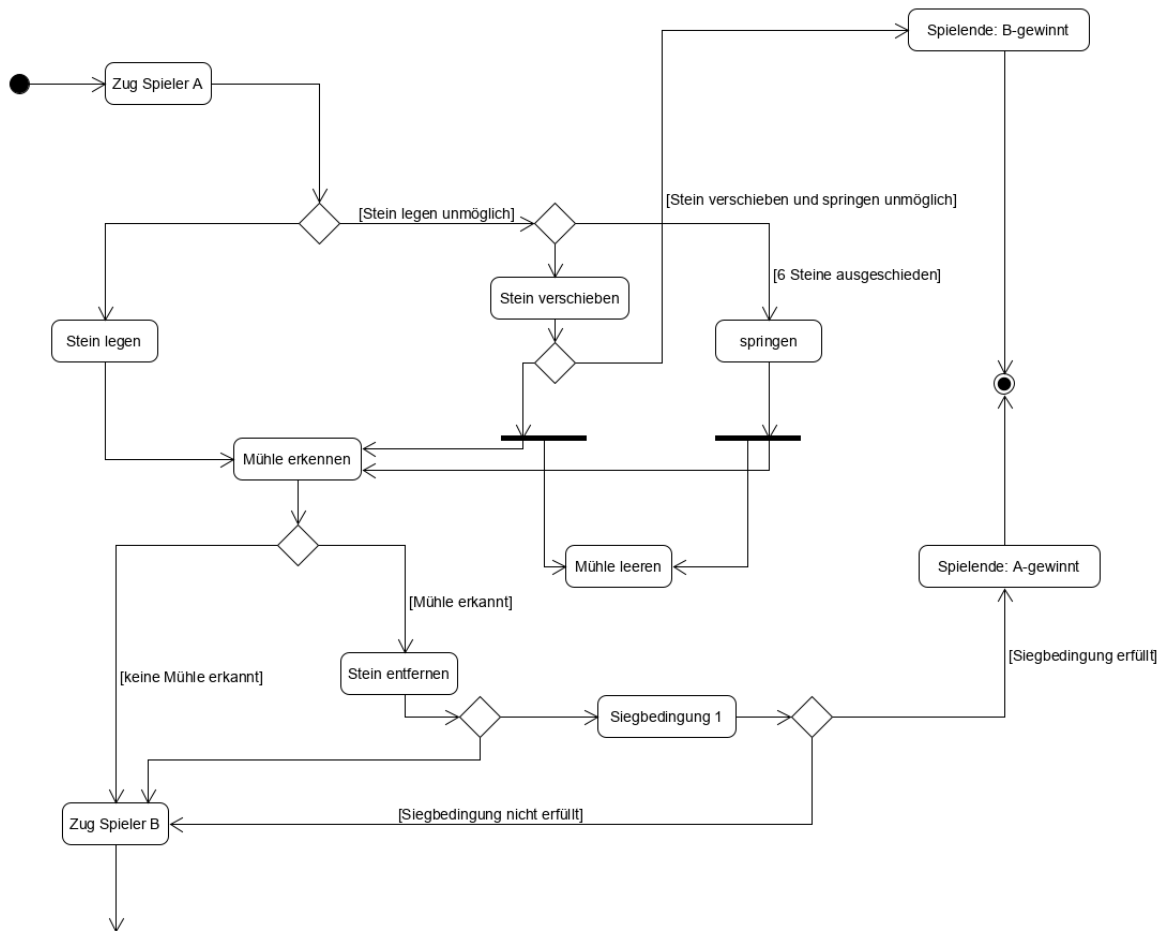


Abbildung 3.17: Übersicht über die Modellierung eines Spielzugs für Spieler A

Beginnt Spieler A seinen Zug, so kann er entweder einen Stein auf das Brett legen oder, falls das nicht möglich ist, in die Phase zum Setzen/Springen übergehen. Wird ein Stein auf dem Brett verschoben oder durch Springen an eine andere Stelle gesetzt, muss geprüft werden, ob dadurch eine Mühle geöffnet wurde. Der Abschnitt zum Leeren wird durchlaufen. Wird ein Stein auf dem Brett abgelegt, verschoben oder durch Springen an eine andere Stelle gesetzt, wird zudem geprüft, ob dadurch eine neue Mühle geschlossen wurde. Ist dies nicht der Fall, ist Spieler B an der Reihe und sein Zug beginnt. Wurde eine Mühle geschlossen, wird in den Netzabschnitt zum Entfernen eines Steins übergegangen.

Kann kein Stein entfernt werden, ist Spieler B an der Reihe. Kann ein Stein entfernt werden, wird geprüft, ob damit eine Siegbedingung erfüllt wurde. Ist sie nicht erfüllt, ist Spieler B an der Reihe. Ist sie erfüllt, endet das Spiel und Spieler A gewinnt. Kann zu Beginn des Zugs weder ein Stein auf das Brett gelegt noch verschoben werden, ist damit die zweite Siegbedingung erfüllt. Das Spiel endet und Spieler B gewinnt.

Um sicherzugehen, dass die einzelnen Netzabschnitte in der richtigen Reihenfolge durchlaufen werden, wurde mit Prioritäten gearbeitet. Die nachfolgende Tabelle enthält alle verwendeten Transitionen mit ihren Prioritäten, wobei eine höhere Zahl auch einer höheren Priorität entspricht und diese Transitionen bei Aktivierung vor denen mit niedriger Priorität geschaltet werden. Zudem enthält die Tabelle eine Spalte mit der Menge an Transitionen einer Kategorie.

Während das Petri-Netz durchlaufen wird, sorgen neben der Verteilung der Prioritäten einige bestimmte Stellen dafür, dass der Ablauf eindeutig ist. Dies sind die Stellen F-SteinLegen, F-P2, MühleLeeren-i,j, F-MühleErkennen und F-SteinEntfernen.

Nach jedem durchlaufenen Abschnitt wurden die entsprechenden spielsteuernden Stellen geleert. Entweder durch Ausführen der zugehörigen Aktion oder durch Überspringen der Aktion, da sie nicht ausgeführt werden konnte. Und ebenso wird jedes Mal die nächste spielsteuernde Stelle belegt. Dadurch kann kein Abschnitt des Petri-Netzes zum falschen Zeitpunkt aktivierte Transitionen enthalten kann. Innerhalb dieser festen Spielabschnitte wird dann nichtdeterministisch ein Weg durch das Netz ausgewählt. So können Steine z.B. zufällig auf jedes freie Feld abgelegt werden oder es wird beim Entfernen eines Steins solange nichtdeterministisch eine Transition f-i,j-entfernen gesucht, bis entweder eine aktive Transition gefunden und gefeuert wurde oder es wird die alternative Transition gewählt, falls kein Stein entfernt werden kann.

Insgesamt benötigt diese Modellierung 1386 Transitionen mit zwei bis sieben ein- und ausgehenden Kanten, ohne Sonderfälle oder Spiel-Strategien zu beachten. Da ein Modell dieser Größe sehr unübersichtlich wird, werden im folgenden Kapitel einige Spiel-Abläufe anhand von Ausschnitten näher betrachtet und die Korrektheit der Modellierung überprüft.

Kategorie	Bezeichnung	Priorität	Anzahl
Stein legen	$f_{i,j}$	20	48
Stein legen unmöglich	F-SteinLegenUnmöglich	15	2
Mühle erkennen	$f_{mi,j1-j3}$ etc.	40	32
keine Mühle erkannt	$F_{i,j}$ -keineMühleErkannt	35	48
Stein verschieben	$f_{i,j-f_{i,j+1}}$ etc.	20	128
Zug unmöglich	F-ZugUnmöglich	15	2
Stein springen	$f_{i,j-f_{i'j'}}$	20	976
Stein entfernen	$f_{i,j}$ -entfernen	60	48
Stein entfernen unmöglich	F-SteinEntfernenUnmöglich	55	2
Mühle öffnen	$mühleLeeren-i,j$ , $zweiteMühleLeeren-i,j$	80	48
Mühle geöffnet	$mühleLeer-i,j$ , $zweiteMühleLeer-i,j$	75	48
Siegbedingung 1	f-gewinnt	100	2
Siegbedingung 1 nicht erfüllt	F-SiegbedingungNichtErfüllt	5	2

Tabelle 3.1: Übersicht über alle Transitionen mit ihren Prioritäten



# Kapitel 4

## Simulation in PIPE

In diesem Kapitel wird zunächst die zur Modellierung und Simulation verwendete Software PIPE vorgestellt. Anhand einfacher Abläufe wird die Simulation vorgestellt und dann auf komplexe Fälle angewendet, um die Korrektheit der Modellierung zu prüfen.

### 4.1 PIPE

PIPE ("The Platform Independent Petri net Editor PIPE", *PIPE - Platform Independent Petri net Editor 2* (o. J.)) ist ein frei erhältliches Open-Source-Werkzeug zur Modellierung von Petri-Netzen. Es wurde in einer Reihe von Masterarbeiten am Imperial College of Science, Technology and Medicine in London entwickelt und wurde von verschiedenen Gruppen weiterentwickelt, so dass es in mehreren Versionen mit unterschiedlichem Funktionsumfang erhältlich ist. In dieser Arbeit wurde mit PIPE v4.3.0 gearbeitet.

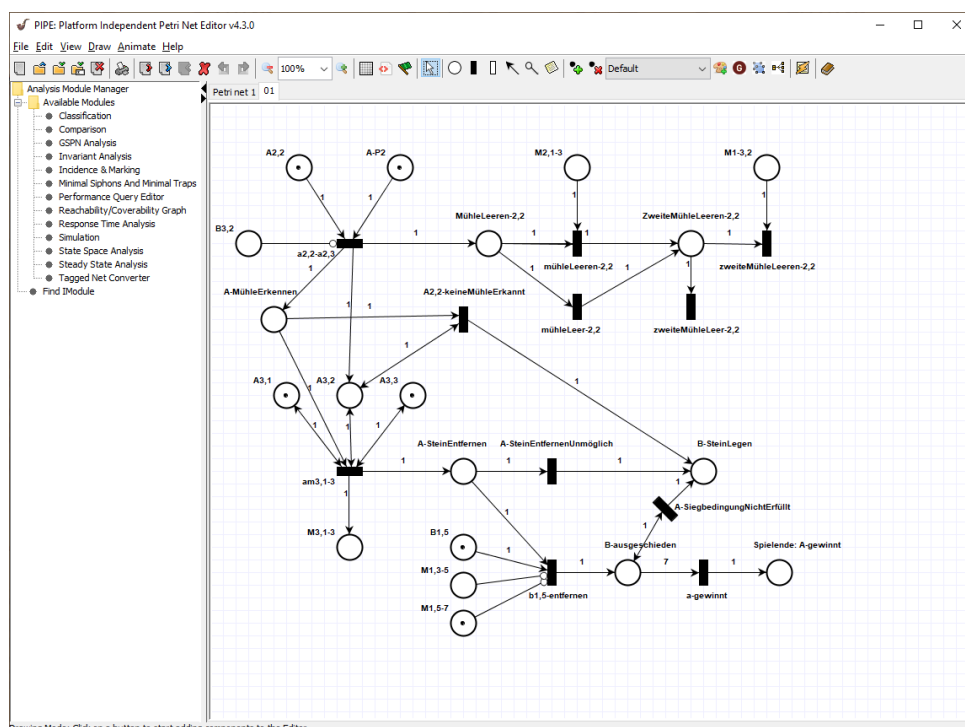


Abbildung 4.1: PIPE

Mit PIPE können Stellen-Transitions-Systeme mit Inhibitorkanten, Kapazitäten und Prioritäten erstellt und Abläufe in diesen Systemen simuliert werden.

Die grafische Oberfläche (Abb. 4.1) teilt sich in das Menü ganz oben, die Icon-Leiste darunter, einen Bereich mit Analysefunktionen auf der linken Seite und einen Bereich zur Modellierung der Petri-Netze auf der rechten Seite, der den größten Teil der Ansicht einnimmt.

Das Menü und die Icon-Leiste beinhalten dieselben Funktionen. Dies sind zum Einen übliche Anwendungsfunktionen wie das Öffnen, Speichern, Drucken oder der Aufruf der Dokumentation und zum Anderen spezielle Funktionen zum Modellieren von Netzen und zur Animation. Über den Analyse-Bereich können je nach PIPE-Version unterschiedliche Arten von Analyse der Petri-Netze vorgenommen werden. Ein Doppelklick auf den jeweiligen Eintrag startet die Analyse. Über den Punkt "Reachability/Coverability Graph" kann z.B. ein Erreichbarkeitsgraph erstellt werden.

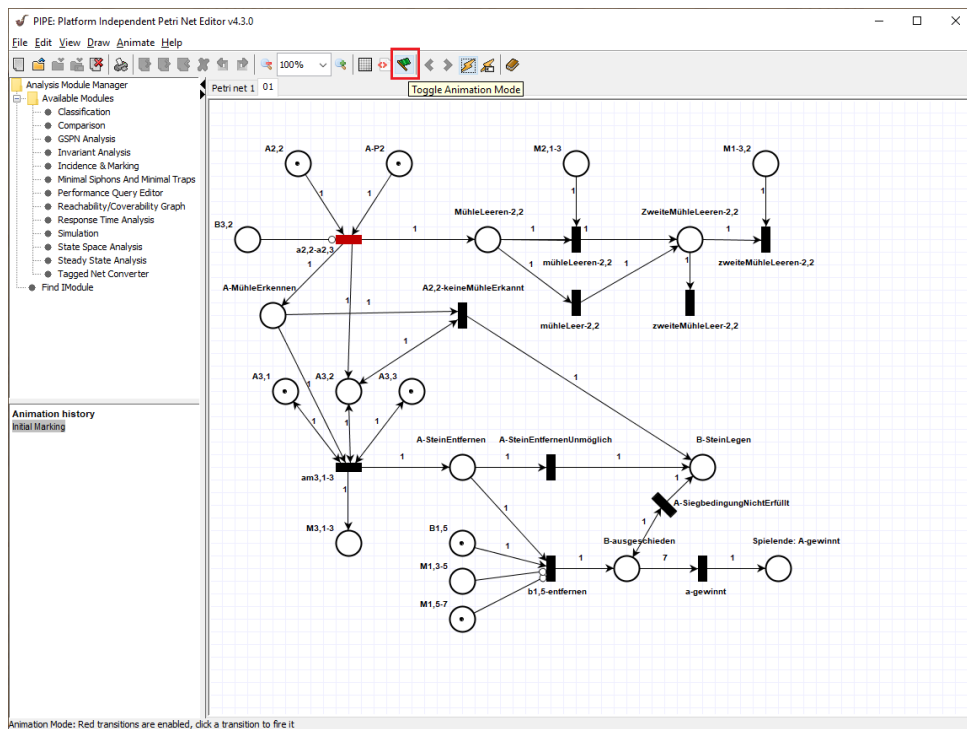


Abbildung 4.2: Wechsel in den Simulationsmodus

Über die grüne Flagge in der Icon-Leiste wird der Simulationsmodus ("Animation mode" genannt) gestartet (Abb. 4.2). In diesem Modus kann die Modellierung überprüft werden. Aktivierte Transitionen werden hier rot dargestellt, alle anderen schwarz.

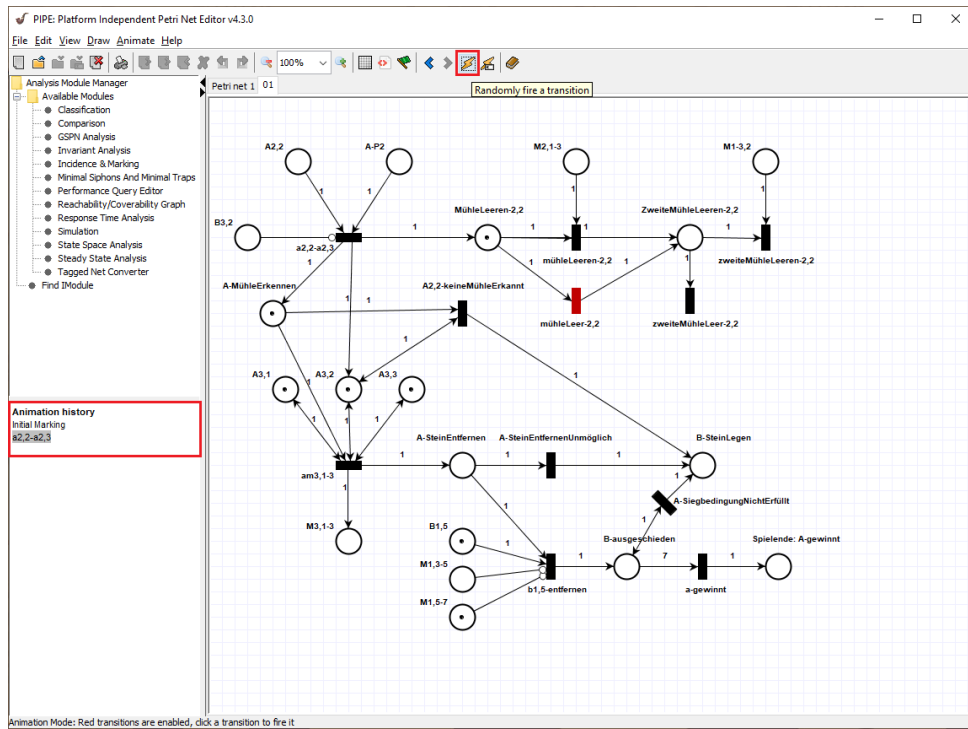


Abbildung 4.3: Feuern einer zufälligen aktivierten Transition.

Im Simulationsmodus wird die linke Seite um einen weiteren Bereich erweitert: die Simulationshistorie (“Animation history”) (Abb. 4.3). Über das Blitzsymbol in der Icon-Leiste feuert eine zufällige aktivierte Transition. Über das Symbol mit Blitz und Eingabefeld rechts daneben, können mehrere Transitionen hintereinander gefeuert werden. Die Reihenfolge der gefeuerten Transitionen wird in der Simulationshistorie festgehalten. Besonders wenn das Netz nicht in einzelnen Schritten durchlaufen wird, kann hier also überprüft werden, ob die Netzabschnitte (also z.B. der Abschnitt zum Legen, der Abschnitt zum Prüfen, ob eine Mühle geschlossen wurde etc.) in der geplanten Reihenfolge durchlaufen wurden.

## 4.2 Simulations-Beispiele

Um die Simulation in PIPE vorzustellen, werden in diesem Abschnitt beispielhaft zwei Netzabschnitte im Simulationsmodus betrachtet.

### 4.2.1 Stein legen

Abbildung 4.4 zeigt den Fall, dass Spieler A am Zug ist und einen Stein auf dem Spielbrett ablegen kann. Die Transition  $a_{i,j}$  wird rot markiert.

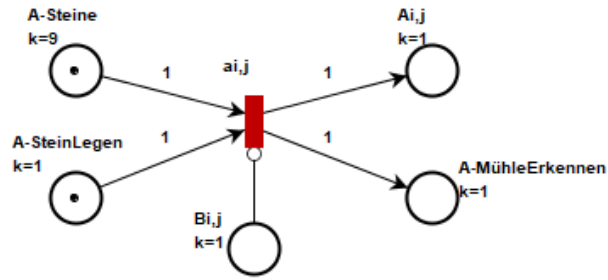


Abbildung 4.4: Hier ist es möglich, einen Stein auf dem Spielbrett abzulegen.

Ist es nicht möglich, einen Stein abzulegen, z.B. weil das Feld bereits durch Spieler B belegt wurde (Abb. 4.5), ist die Transition  $ai,j$  nicht aktiviert und bleibt schwarz.

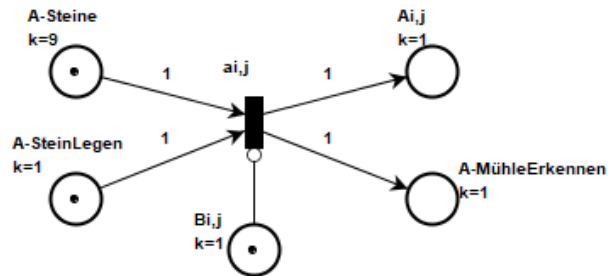


Abbildung 4.5: In dieser Situation kann der Stein nicht auf dem Feld abgelegt werden, da  $Bi,j$  bereits belegt ist.

Ob eine einzelne Transition aktiviert ist, ist in diesem Beispiel auch ohne eine Simulation leicht zu erkennen. Im Anhang finden sich einige weitere leicht zu erkennende Fälle. Als nächstes wird eine Simulation mit vier Transitionen betrachtet, in der bereits die Prioritäten zum Einsatz kommen.

### 4.2.2 Mühlen öffnen

Zunächst wird in den Abbildungen 4.6 und 4.7 der Fall betrachtet, dass keine geschlossene Mühle vorhanden ist. Hier sind nur die Transitionen  $mühleLeer-i,j$  und  $zweiteMühleLeer-i,j$  aktiv, so dass nur diese geschaltet werden können.

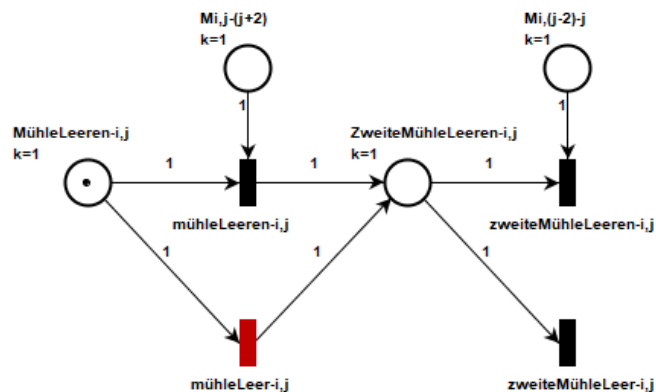


Abbildung 4.6:  $ML_{-i,j}$  ist belegt, aber  $Mi_{,j-(j+2)}$  ist nicht geschlossen

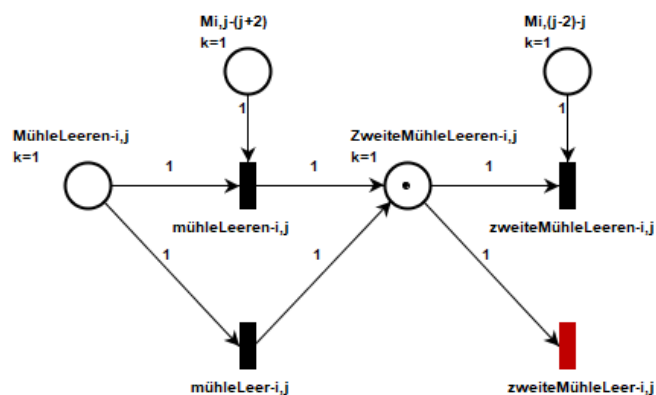


Abbildung 4.7:  $ML_{-i,j-2}$  ist belegt, aber  $Mi_{,(j-2)-j}$  ist nicht geschlossen

Die Abbildungen 4.8 und 4.9 zeigen den gegenteiligen Fall, in dem zwei Mühlen durch den vom Feld  $i,j$  entfernten Stein geöffnet werden. Die Transitionen  $mühleLeeren_{-i,j}$  und  $zweiteMühleLeeren_{-i,j}$  werden aufgrund ihrer höheren Priorität gegenüber den Transitionen  $mühleLeer_{-i,j}$  und  $zweiteMühleLeer_{-i,j}$  nacheinander aktiv und feuern.

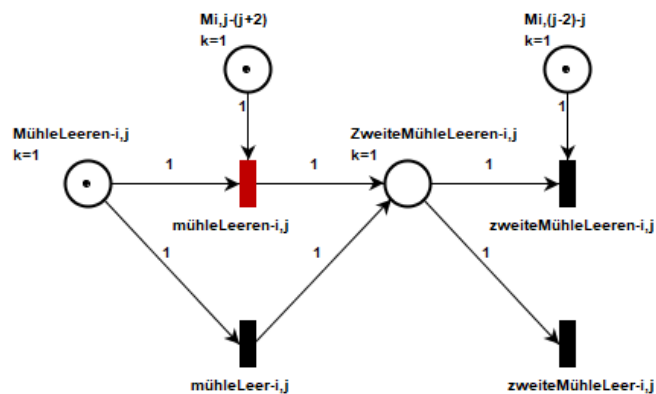


Abbildung 4.8:  $ML_{-i,j}$  ist belegt und  $Mi_{,j-(j+2)}$  ist geschlossen

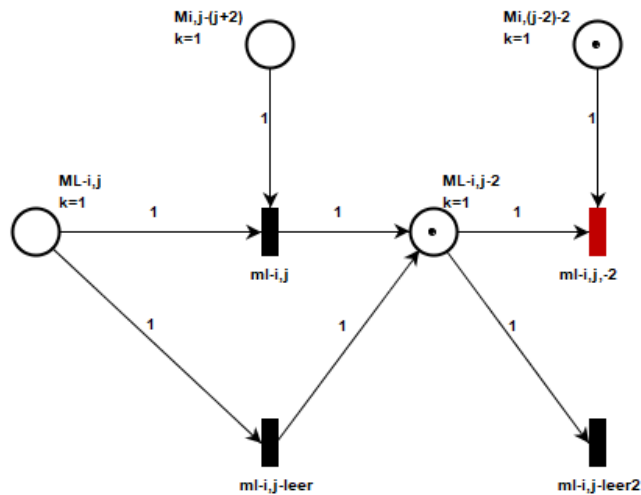


Abbildung 4.9:  $ML-i,j-2$  ist belegt und  $Mi,(j-2)-j$  ist geschlossen

Diesem Muster entsprechend kann durch die Simulationsfälle auch gezeigt werden, dass in dem Fall, in dem nur eine Mühle geöffnet werden kann, sowohl eine der unteren als auch eine der oberen Transitionen nacheinander aktiviert werden. Je mehr Transitionen ein Modell enthält, umso unübersichtlicher wird es, die möglichen Schaltfolgen zu erkennen.

### 4.3 Simulation von Abläufen

Mit Hilfe der Simulation kann getestet werden, ob die einzelnen Teilsysteme richtig miteinander verknüpft wurden und die Prioritäten der Transitionen korrekt zugewiesen wurden. Dazu werden größere Ausschnitte des gesamten Netzes als bisher betrachtet, die Verbindungen zwischen den Teilnetzen zeigen.

#### 4.3.1 Stein legen vs ziehen

Im ersten Schritt eines Spielzugs wird entschieden, ob ein Stein auf das Brett gelegt werden kann oder nicht. Hierfür werden die in den Abschnitten 3.2 und 3.4 gezeigten Netzabschnitte gemeinsam betrachtet.

In Abbildung 4.10 befindet sich ein Token in der Stelle A-SteinLegen. Damit ist Spieler A an der Reihe. Solange noch nicht alle Spielsteine auf dem Brett abgelegt wurden, befinden sich Tokens in A-Steine und die  $ai,j$ -Transitionen für alle Spielfelder  $Ai,j$ , die noch nicht von einem Spieler belegt wurden, sind aktiv.

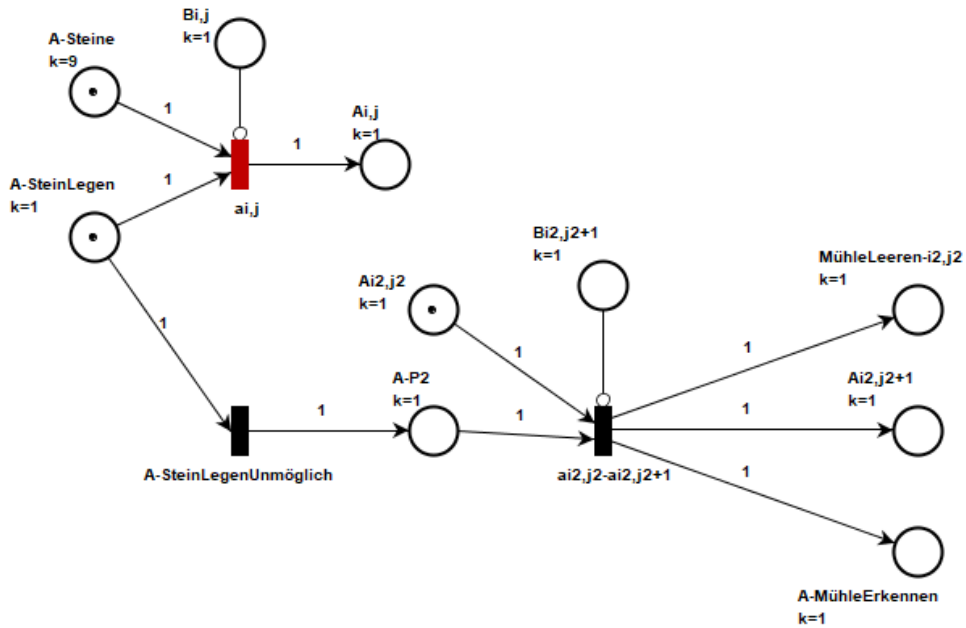


Abbildung 4.10: Ausgangssituation: Spieler A ist am Zug und hat noch Steine abzulegen, daher ist  $ai,j$  aktiviert.

Wurden alle Steine abgelegt, ist keine  $ai,j$ -Transition mehr aktiv und im ersten Schritt des Spielzuges muss A-SteinLegenUnmöglich geschaltet werden. Die Verteilung einer höheren Priorität von 20 an die  $ai,j$ -Transitionen gegenüber der Priorität von 10 der A-SteinLegenUnmöglich-Transition sorgt dafür, dass alle Steine abgelegt wurden, bevor gezogen werden kann (Abb. 4.11).

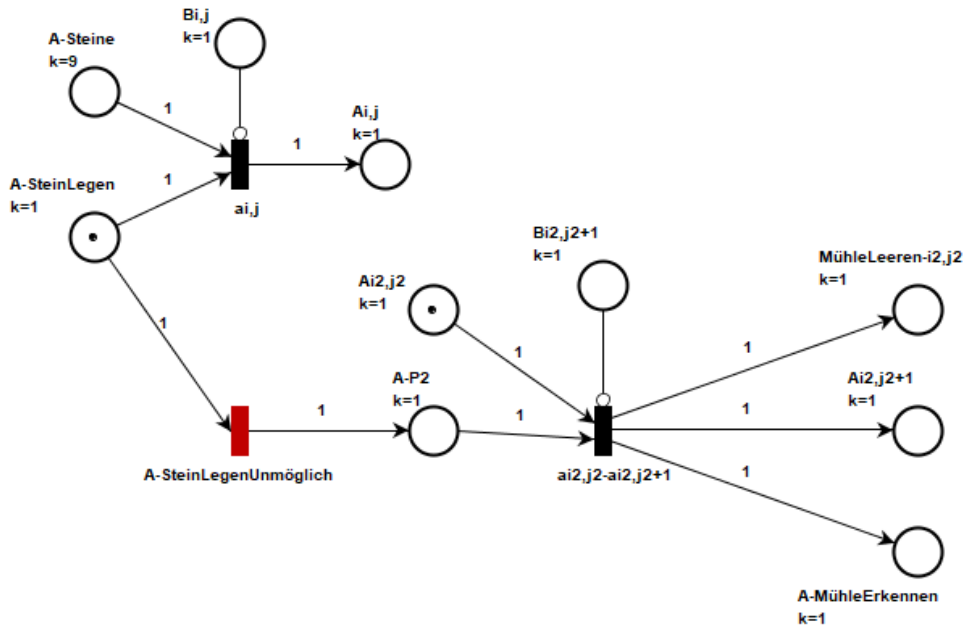


Abbildung 4.11: Spieler A ist am Zug und hat bereits alle seine Steine abgelegt, daher kann er zum Verschieben von Steinen wechseln

Ab diesem Punkt sind alle Transitions zum Verschieben von Steinen aktiv, die nicht durch eine bereits vorhandene Belegung blockiert sind (Abb. 4.12). Sobald Spieler A nur noch drei Steine auf dem Brett hat, werden alternativ die Transitions zum Springen mit Steinen aktiv, die die gleiche Priorität haben.

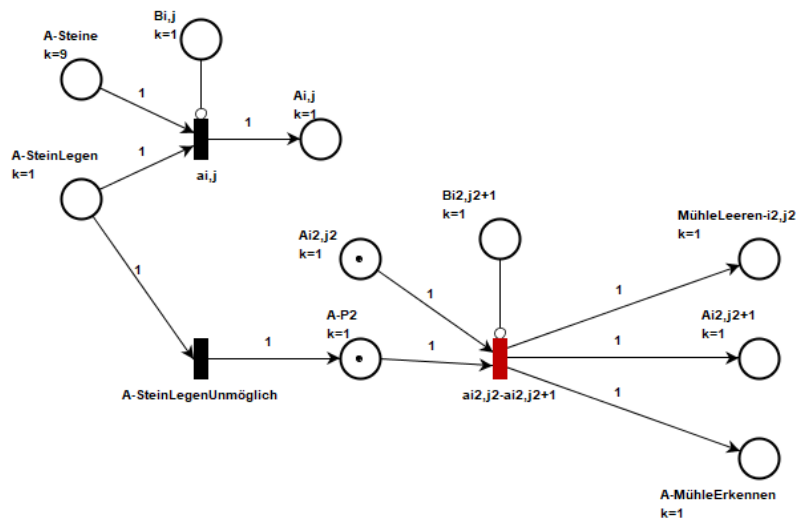


Abbildung 4.12: A-SteinLegenUnmöglich wurde gefeuert, Spieler A kann seinen Stein von  $A_{i2,j2}$  zu  $A_{i2,j2+1}$  verschieben

Wurde ein Stein verschoben, ist das entsprechende Feld belegt und der Abschnitt zum Leeren einer Mühle aktiv. Damit wurde dieser Netzabschnitt vollständig durchlaufen.



Abb. 4.13 zeigt den Erreichbarkeitsgraphen für den Fall, dass Spieler A einen Stein verschieben kann.

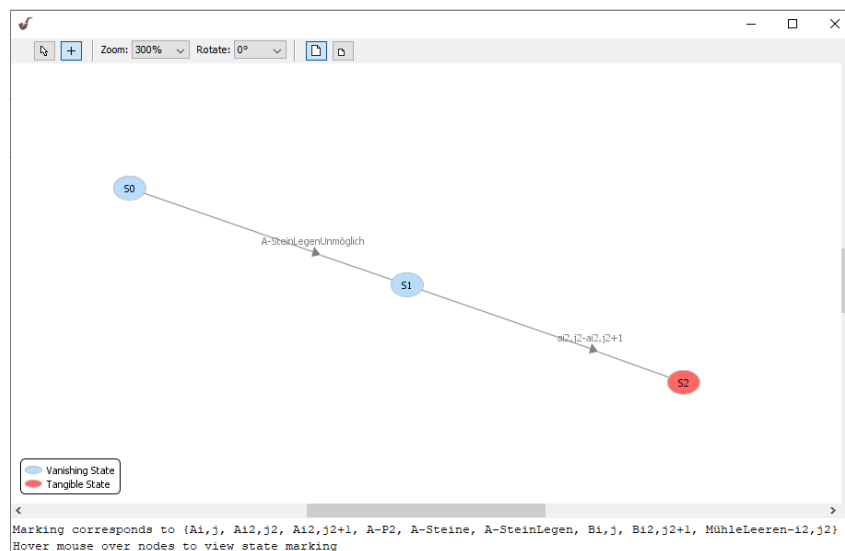


Abbildung 4.13: Erreichbarkeitsgraph

Für diesen Netzabschnitt kann der Erreichbarkeitsgraph je nach Markierung bis zu drei Knoten enthalten. Die Reihenfolge, in der diese Knoten erreicht werden ist eindeutig und auch nur aus der Modellierung heraus leicht zu sehen. Würde z.B. das Verschieben von Steinen bezogen auf mehrere bestimmte Transitionen betrachtet, gäbe es so viele parallele Wege, wie es mögliche Züge gäbe, die sich aber alle den Weg von S0 zu S1 teilen würden.

### 4.3.2 Teilzug von Stein verschieben bis Siegbedingung

Im Folgenden wird ein Teilzug von Spieler A vom Verschieben eines Spielsteins bis zum Übergang zu Spieler B bzw. bis zum Spielende unter verschiedenen Bedingungen betrachtet. Abbildung 4.14 zeigt die Ausgangssituation. Spieler A hat unter Anderem die Felder A3,1, A3,3 und A2,2 belegt und ist am Zug. Der Übergang von A-SteinLegen zu A-P2 wurde bereits wie im vorherigen Abschnitt gezeigt durchlaufen. Spieler B hat u.A. einen Stein auf dem Feld B1,5 liegen, der Teil der Mühle M1,5-7 ist.

In dieser Phase des Spielzugs sind nur die Transitionen zum Verschieben und evtl. Springen aktiv. In diesem Ausschnitt wird nur die Transition a2,2-a3,2 betrachtet. Spieler A muss also seinen Stein verschieben, um das Spiel fortzusetzen.

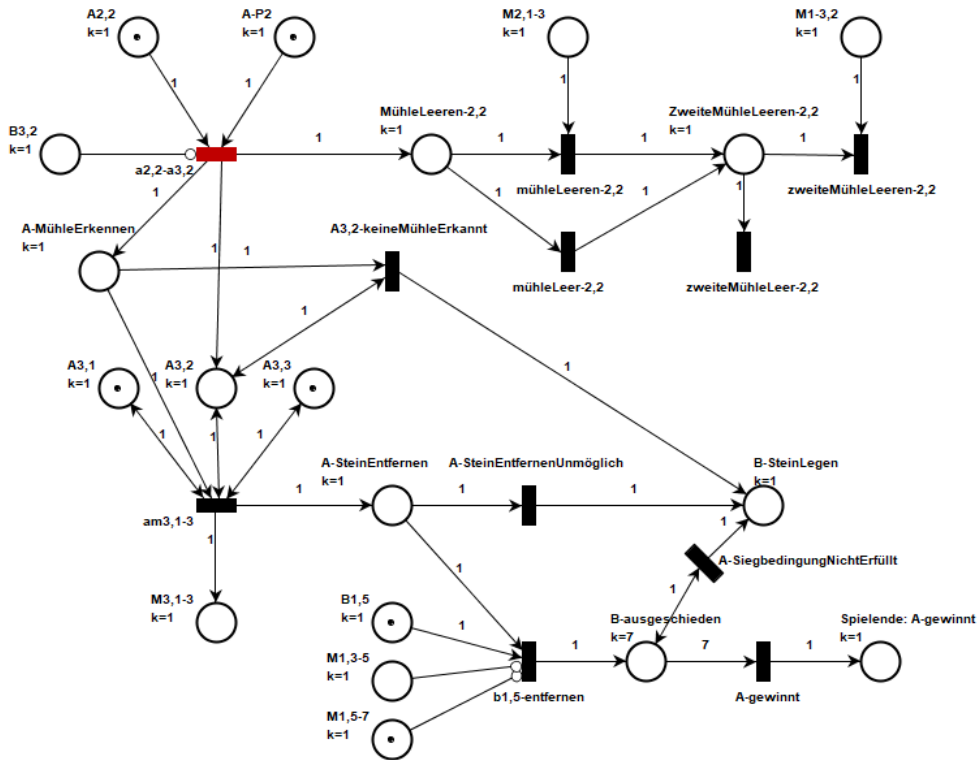


Abbildung 4.14: Zu Beginn des Abschnitts kann nur die Transition  $a_{2,2}-a_{3,2}$  schalten.

Wird nun die Transition  $a_{2,2}-a_{3,2}$  geschaltet, ergibt sich die in Abb. 4.15 dargestellte Situation.

Bevor weitere Auswertungen vorgenommen und Aktivitäten stattfinden können, muss aufgrund der hohen Priorität der Transitionen im Abschnitt zum Mühle Leeren, dieser durchlaufen werden. Die dabei möglichen Verläufe wurden bereits in Abschnitt 4.2.2 betrachtet und werden daher an dieser Stelle nicht wiederholt.

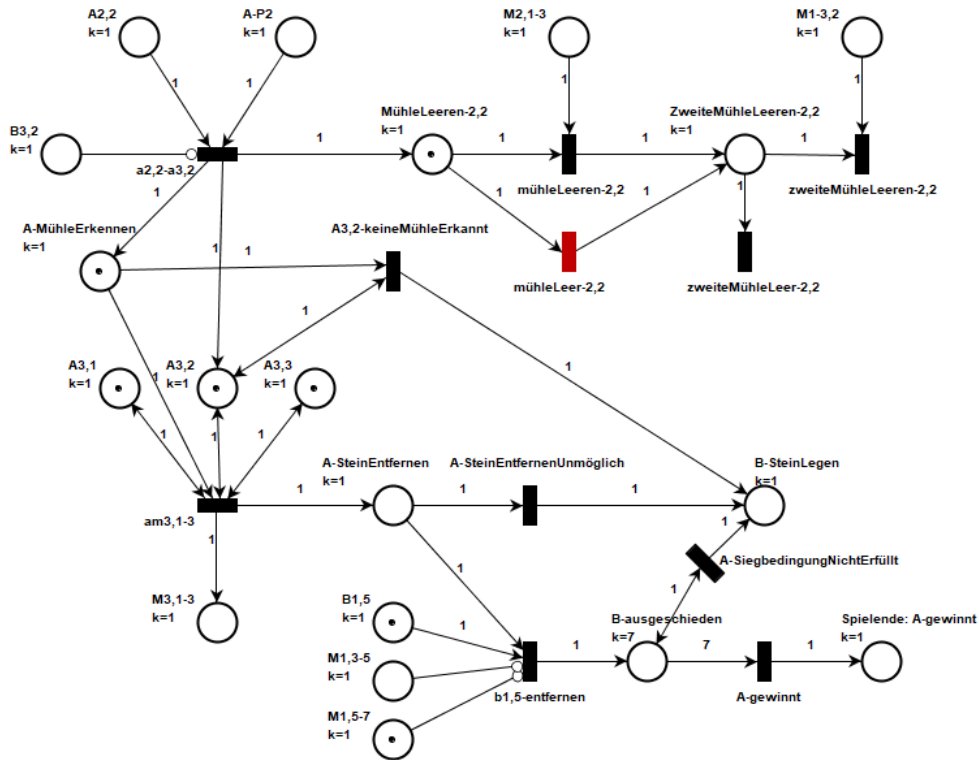


Abbildung 4.15: Im zweiten Schritt wird getestet, ob sich eine Mühle geöffnet hat.

Im nächsten Schritt erfolgt der Test darauf, ob eine neue Mühle geschlossen wurde. Hier wird wieder über die etwas höhere Priorität der Transitionen zum Erkennen sicher gegangen, dass alle möglichen neuen Mühlen erkannt werden und der Schritt nicht übersprungen werden kann. In Abbildung 4.16 ist dies zu sehen. Dort schließt Spieler A die Mühle M3,1-3. Daher ist am3,1-3 als einzige Transition aktiviert und muss geschaltet werden.

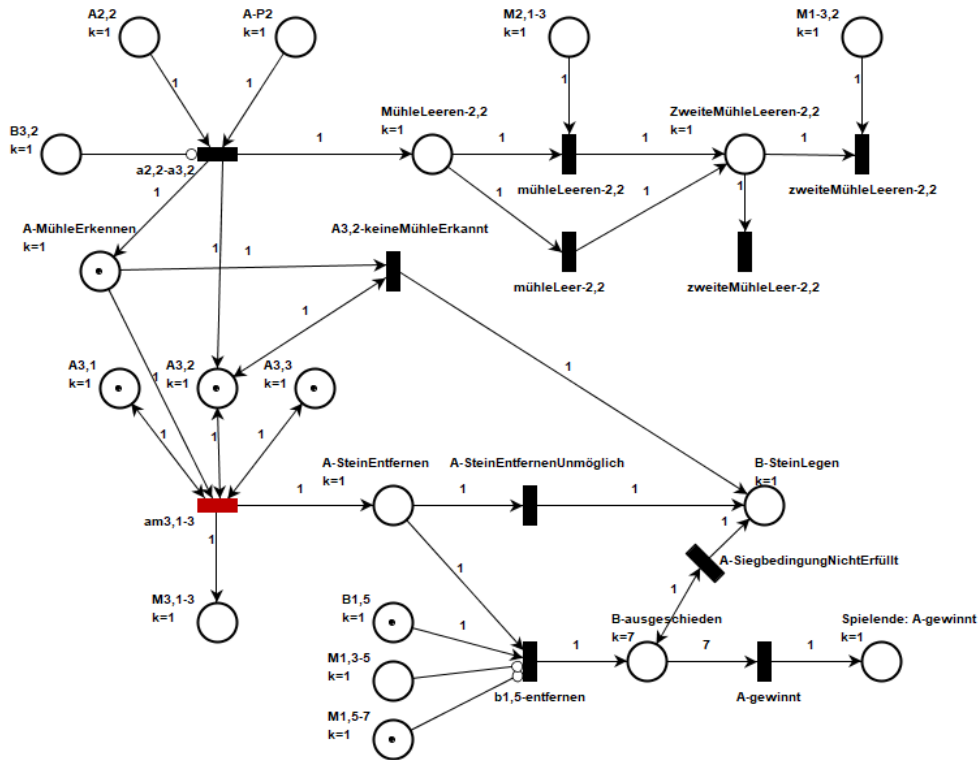


Abbildung 4.16: Im dritten Schritt wird die neu geschlossene Mühle erkannt

Dies führt dazu, dass als Nächstes geprüft werden muss, ob Spieler A einen Stein von Spieler B entfernen kann. In Abbildung 4.17 ist dies nicht möglich, da der beispielhaft zu entfernende Stein auf Feld 1,5 Teil einer Mühle von Spieler B ist. In diesem Fall wird die Transition `A-SteinEntfernenUnmöglich` aktiv und der einzig mögliche Verlauf besteht darin, diese zu feuern, sodass nun Spieler B an der Reihe ist.

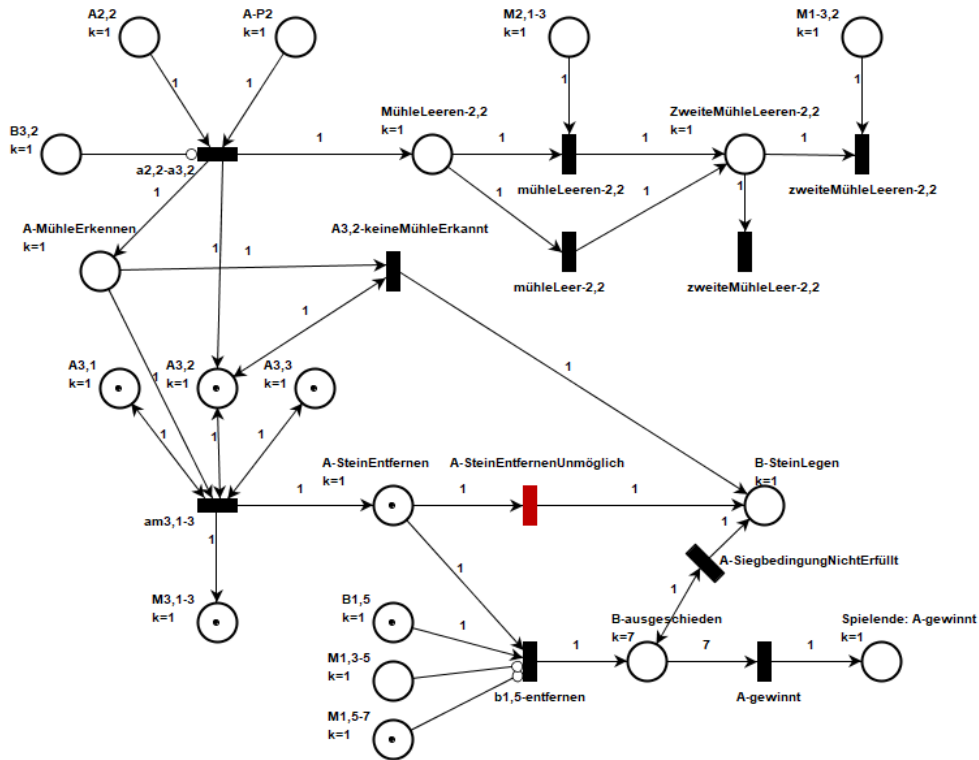


Abbildung 4.17: Der Stein von Spieler B befindet sich in einer Mühle und kann nicht entfernt werden.

Der Erreichbarkeitsgraph (Abb. 4.18) zeigt ebenfalls die Eindeutigkeit der Schaltfolge. Würde ein größerer Netzabschnitt betrachtet werden, in dem z.B. mehrere Steine auf unterschiedliche Felder verschoben werden können, gäbe es mehrere Wege durch den Graphen.

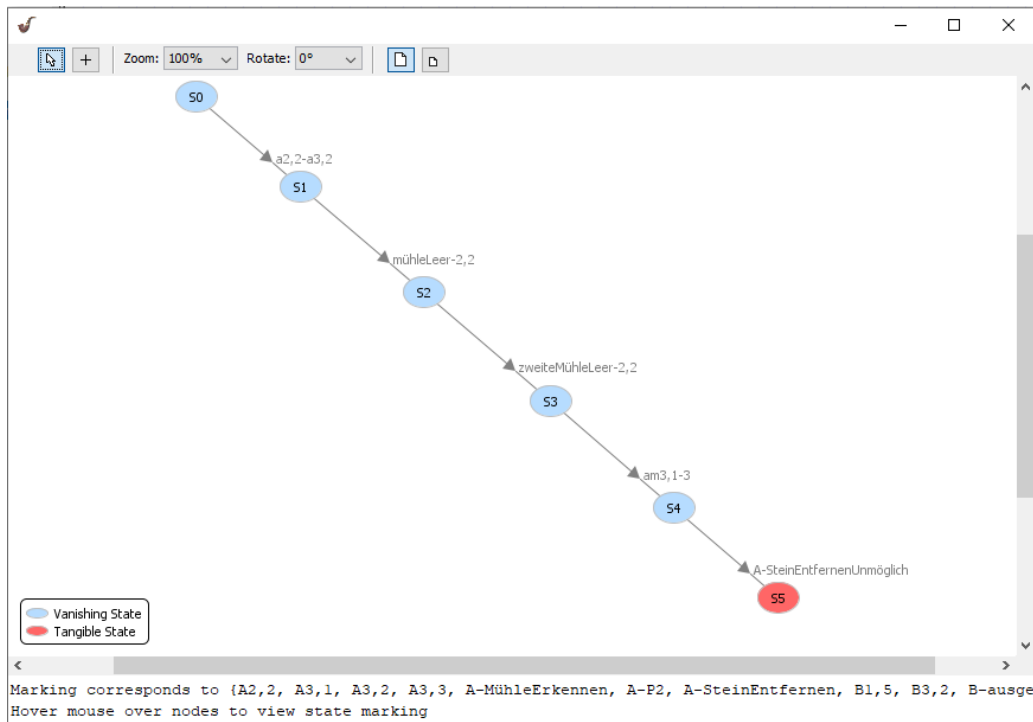


Abbildung 4.18: Erreichbarkeitsgraph der Schaltfolge.

Ist der Stein von Spieler B auf Feld 1,5 nicht Teil einer Mühle, wird die Transition b1,5-entfernen aktiv und die höhere Priorität verhindert, dass direkt zum Zug von Spieler B übergegangen werden kann (Abb. 4.19).

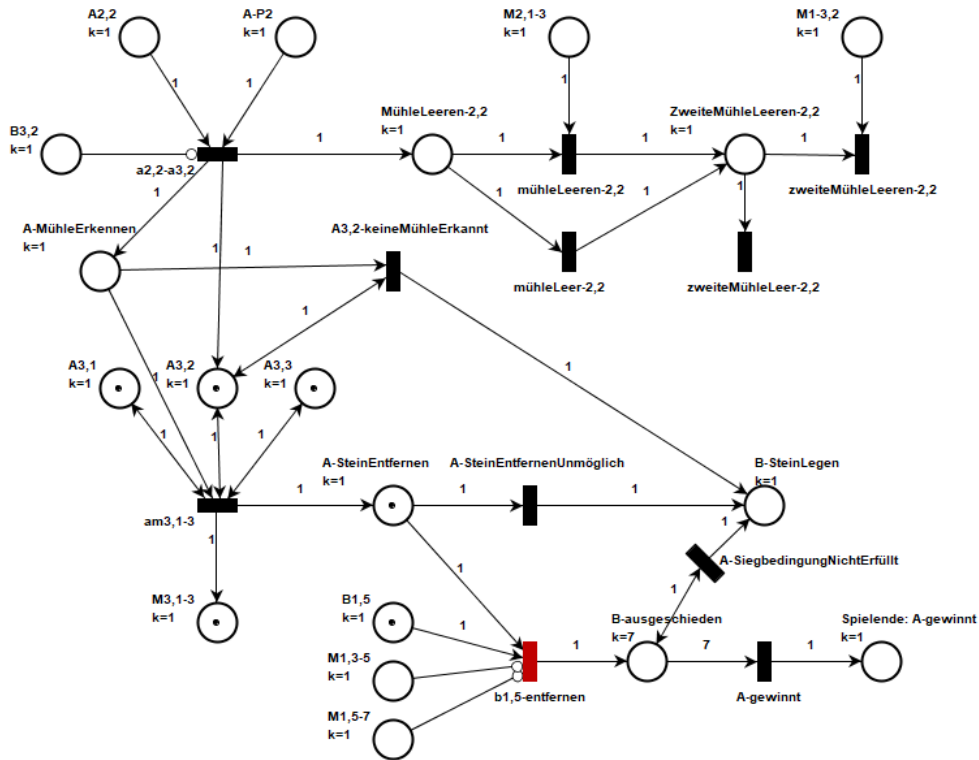


Abbildung 4.19: In diesem Fall befindet sich der Stein von Spieler B nicht in einer Mühle und kann entfernt werden.

Der Spielablauf geht nun in die Prüfung auf Siegbedingung eins über (Abb. 4.20). Da dies der erste von Spieler A entfernte Stein ist, ist die Siegbedingung nicht erfüllt und es wird übergegangen zum Zug von Spieler B.

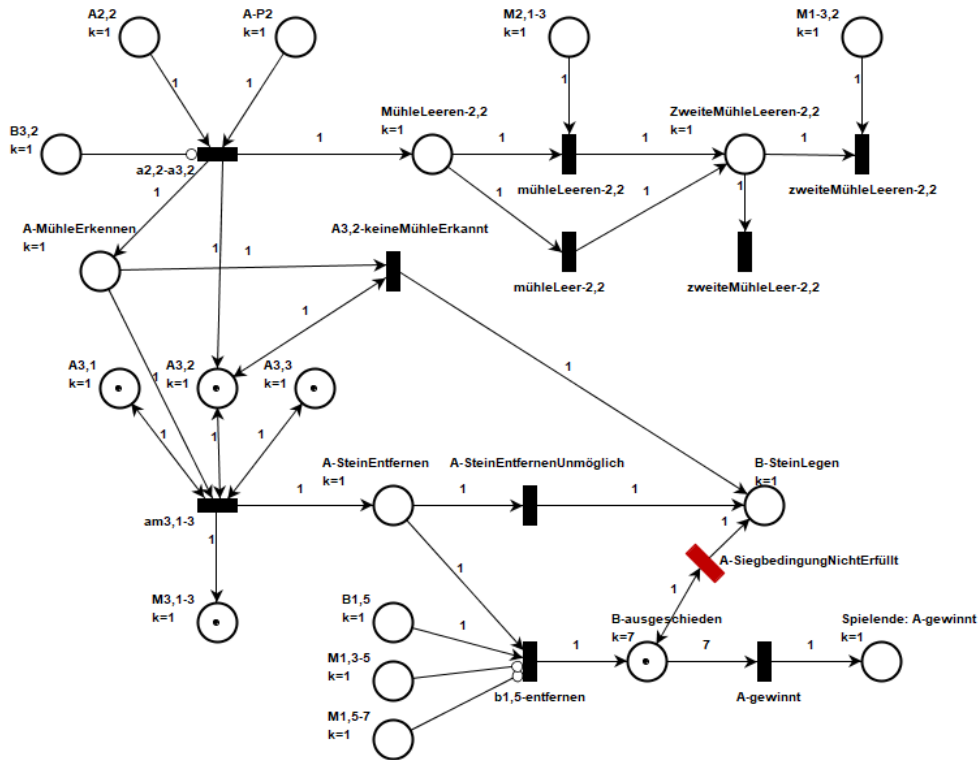


Abbildung 4.20: Spieler A hat weniger als sieben Steine von Spieler B vom Brett entfernt.

Befinden sich dagegen nach dem Entfernen genau sieben Tokens in der Stelle B-ausgeschieden, wird die Transition A-gewinnt mit der höheren Priorität aktiviert und stellt die einzige Zugmöglichkeit dar (Abb. 4.21). Damit gewinnt Spieler A das Spiel und es ist kein weiterer Zug möglich. Das Netz befindet sich in einem Deadlock und das Spiel ist beendet.



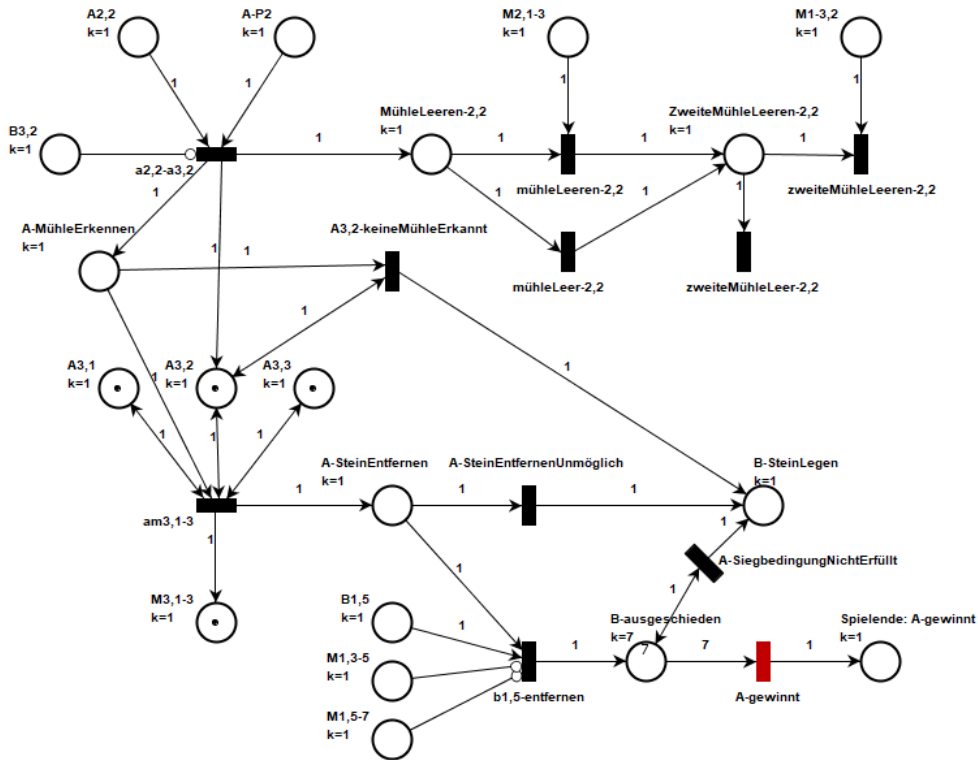


Abbildung 4.21: Spieler A hat sieben Steine von Spieler B vom Brett entfernt.

### 4.3.3 Blockieren des Gegenspielers

Als Letztes wird der Sieg durch vollständiges Blockieren des Gegners betrachtet. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass beide Spieler nur noch auf den inneren zwei Quadranten Steine liegen haben. Abb. 4.22 zeigt beide Spielbrett-Kopien mit den jeweils markierten Feldern. Alle von Spieler B gelegten Steine wurden durch Spieler A blockiert. Da beide Spieler ihre neun Steine verteilt haben und Spieler B mehr als drei Steine übrig hat, bleibt nur die Möglichkeit, einen Stein zu verschieben.

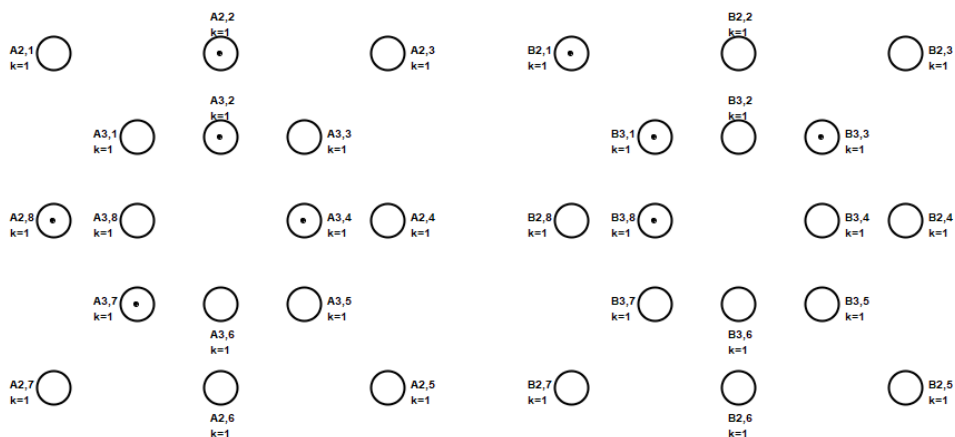


Abbildung 4.22: Ausgangssituation: Durch Spieler A und Spieler B belegte Felder

Für die Simulation wird nur das innere Quadrat betrachtet. Abbildung 4.23 zeigt die acht Felder von Spieler B, die Transitionen zum Verschieben zwischen den belegten Feldern, sowie die für diese Transitionen benötigten Felder von Spieler A. Des Weiteren befindet sich in der Mitte des Netzes die Stelle B-P2, die anzeigt, dass Spieler B am Zug ist und einen Stein verschieben muss.

Von der Stelle B-P2 geht eine weitere Transition aus, die Transition B-ZugUnmöglich. Die Transitionen F-ZugUnmöglich sind (wie die Stellen F-SteinLegenUnmöglich beim Legen eines Steins) die Alternative, wenn es nicht möglich ist, einen Stein zu verschieben. Durch die niedrigere Priorität werden diese Transitionen nur dann aktiv, wenn keine Möglichkeit zum Verschieben gegeben ist. Das Feuern einer F-ZugUnmöglich-Transition beendet immer das Spiel und lässt den Spieler verlieren, der gerade am Zug ist.

Da alle Felder, die Spieler B durch das Verschieben eines Steins erreichen kann, entweder durch Spieler A oder durch Spieler B selbst bereits belegt sind, bleibt nur die Möglichkeit, das Spiel zu verlieren.

Wird das mittlere Quadrat zusätzlich betrachtet, verändert sich die Situation nicht. Die Anzahl der nicht aktiven Transitionen zum Verschieben erhöht sich nur, wodurch die Abbildung unübersichtlicher werden würde.

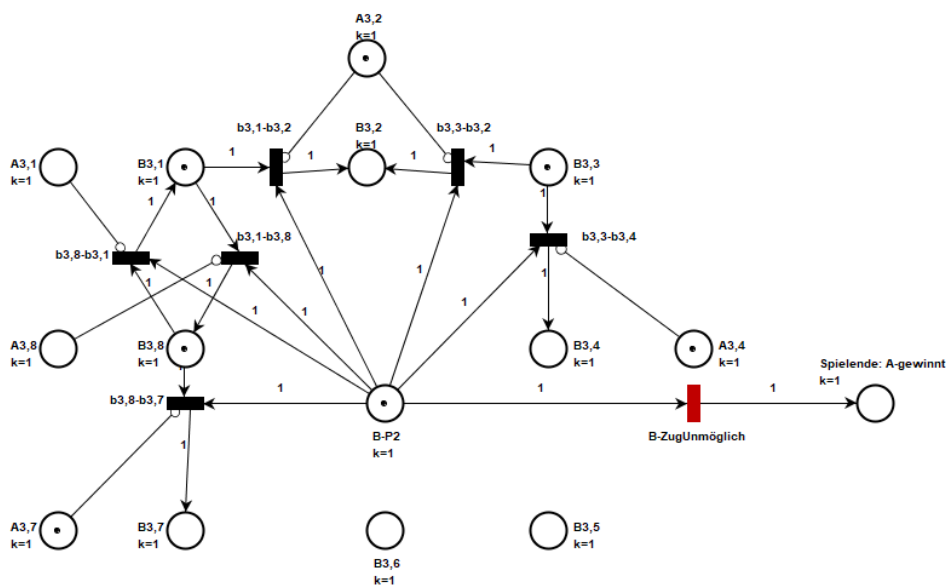


Abbildung 4.23: Spieler B ist vollständig blockiert.

Gibt es auch nur eine einzige Zugmöglichkeit für Spieler B (siehe Abb. 4.24), so ist diese aktiv und die einzige Möglichkeit, die Schaltfolge fortzusetzen. Das Spiel wird daraufhin wie gewohnt fortgesetzt und landet nicht in einem Deadlock.

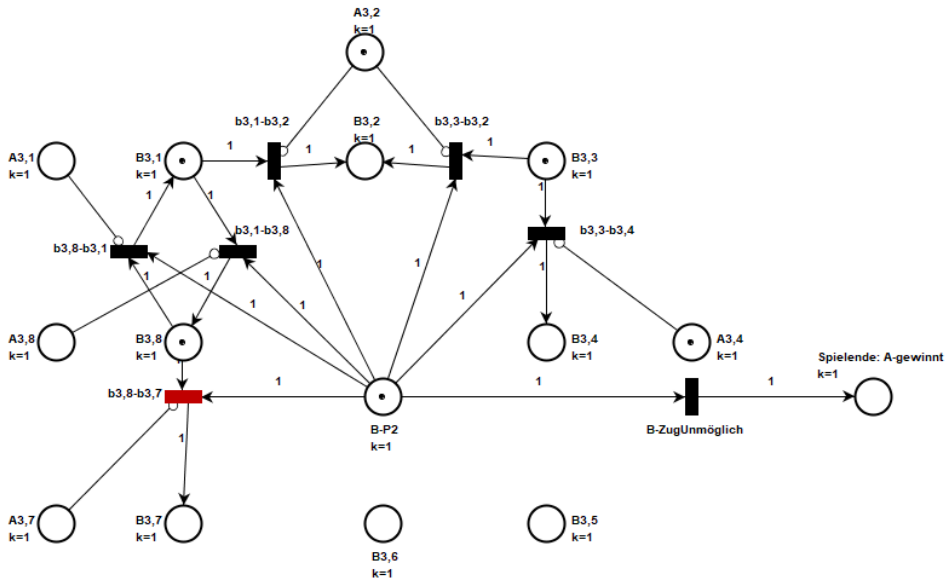


Abbildung 4.24: Spieler B hat eine Zugmöglichkeit.

## 4.4 Weitere Fälle

Im Folgenden werden die zwei in Kapitel 2 als Sonderfälle bezeichneten Situationen betrachtet, die nicht in die eigentliche Modellierung integriert wurden.

### 4.4.1 Zwei Mühlen mit einem Stein schließen

Kann ein Spieler mit dem Ablegen eines Steins auf dem Spielbrett zwei Mühlen gleichzeitig schließen, so darf er trotzdem nur einen Stein seines Gegners entfernen. Eine Möglichkeit, dies zu modellieren besteht darin, die Kapazität der F-MühleErkennen-Stellen auf zwei zu erhöhen und über die  $f_{i,j}$ -Transitionen immer zwei Marken in diese zu legen. Die Transitionen zum Entfernen eines Steins werden verdoppelt, um abzudecken, ob eine oder zwei Mühlen geschlossen wurden. Gleichzeitig müssen auch die Stellen F-SteinEntfernen verdoppelt werden. Es wird eine zusätzliche Transition eineMühleErkannt eingeführt, die zusätzliche Marken aus den F-MühleErkennen-Stellen entfernt, falls nur eine Mühle erkannt wurde.

Abb. 4.25 zeigt den Fall, dass Spieler A mit einem abgelegten Stein zwei Mühlen schließen kann.

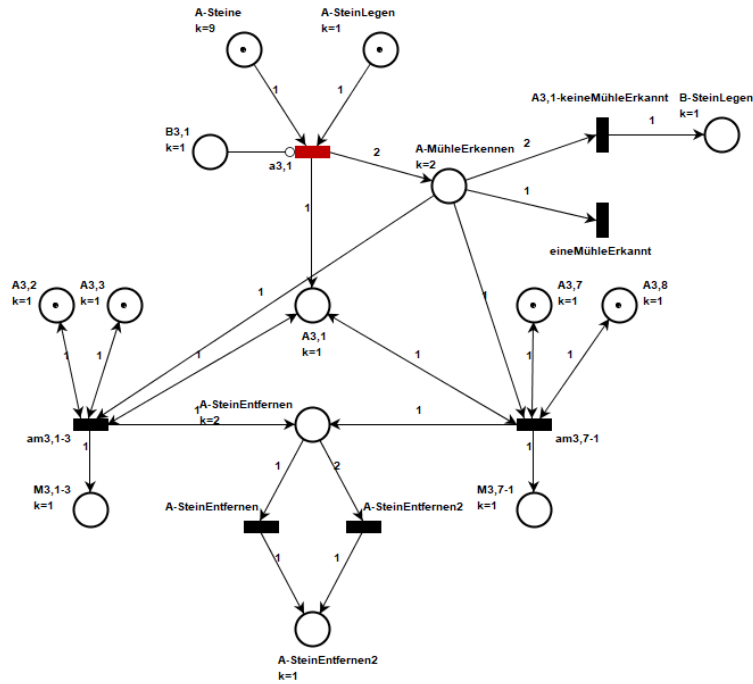


Abbildung 4.25: Ausgangssituation: Zwei Mühlen werden mit einem abgelegten Stein geschlossen.

In diesem Beispiel hat Spieler A bereits Steine auf den Feldern 3,2, 3,3, 3,7 und 3,8 liegen. Legt er nun einen Stein auf das Eckfeld 3,1 ab, schließt er zwei Mühlen gleichzeitig (Abb. 4.26). Durch die höhere Priorität der Transitionen am3,1-3 und am3,7-1 wird zunächst geprüft, ob die Mühlen geschlossen wurden.

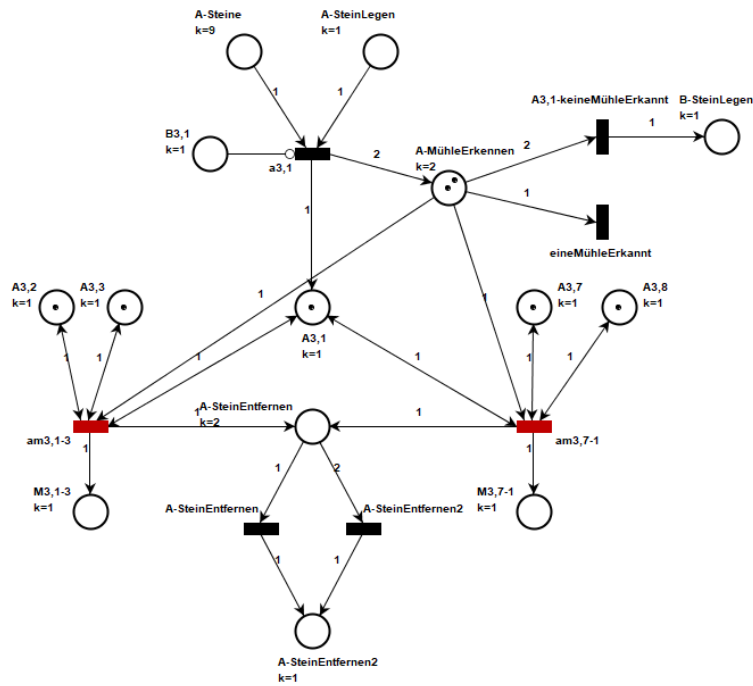


Abbildung 4.26: Die Transitionen zum Schließen der Mühlen sind aktiv und werden nacheinander geschaltet.

Hier ist das der Fall, daher werden zwei Marken in die Stelle A-SteinEntfernen gelegt, deren Kapazität auf 2 erhöht wurde (Abb. 4.27). Da beide Transitionen die gleiche Priorität haben, schalten sie nacheinander in zufälliger Reihenfolge. Nun wird die Transition A-SteinEntfernen2 aktiv, die eine höhere Priorität hat als die Transition A-SteinEntfernen. Es wird eine Marke in die Stelle A-SteinEntfernen-Schritt2 gelegt und der Netzabschnitt zum Entfernen eines Steins kann wie gewohnt durchlaufen werden.

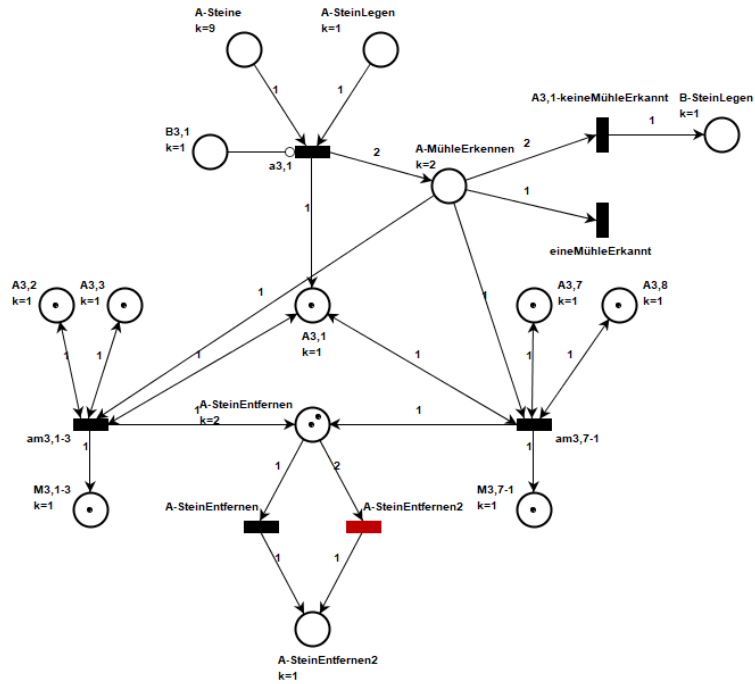


Abbildung 4.27: Fall 1: Es wurden zwei Mühlen geschlossen.

Falls Spieler A mit dem Ablegen seines Steins nur eine Mühle schließt, bleibt nach dem Schließen der Mühle eine Marke in der Stelle A-MühleErkennen übrig. Diese wird über die Transition keineMühleErkannt wieder entfernt. Um in diesem Fall die nicht benötigte Marke zu entfernen, wird nur eine Transition benötigt, da sie unabhängig von Spieler A/B und unabhängig vom verwendeten Feld schalten kann.

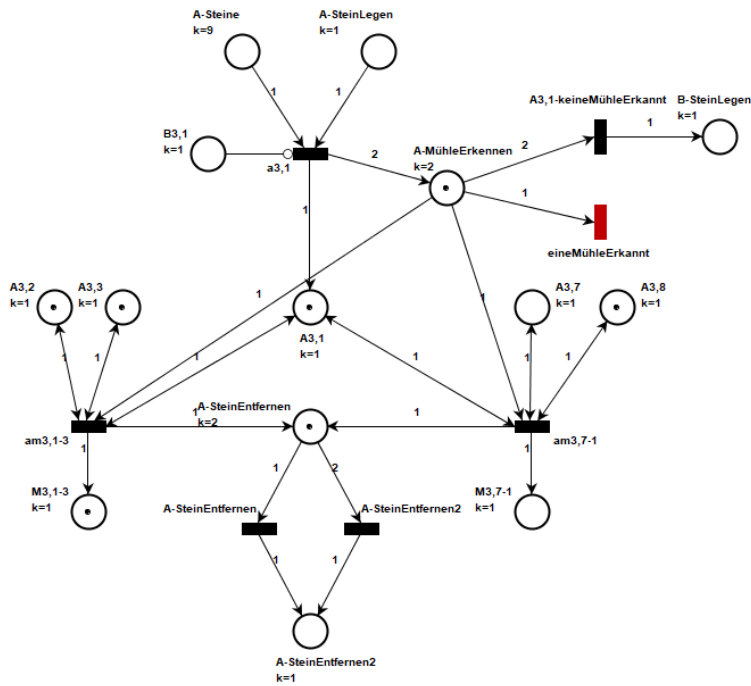


Abbildung 4.28: Fall 2, Schritt 1: Eine Mühle wurde geschlossen, das zweite Token wird entfernt.

Nun kann nur noch die Transition A-SteinEntfernen schalten (Abb. 4.29) und der Netzabschnitt endet, abgesehen von einer Mühle weniger, genau wie im ersten Fall.

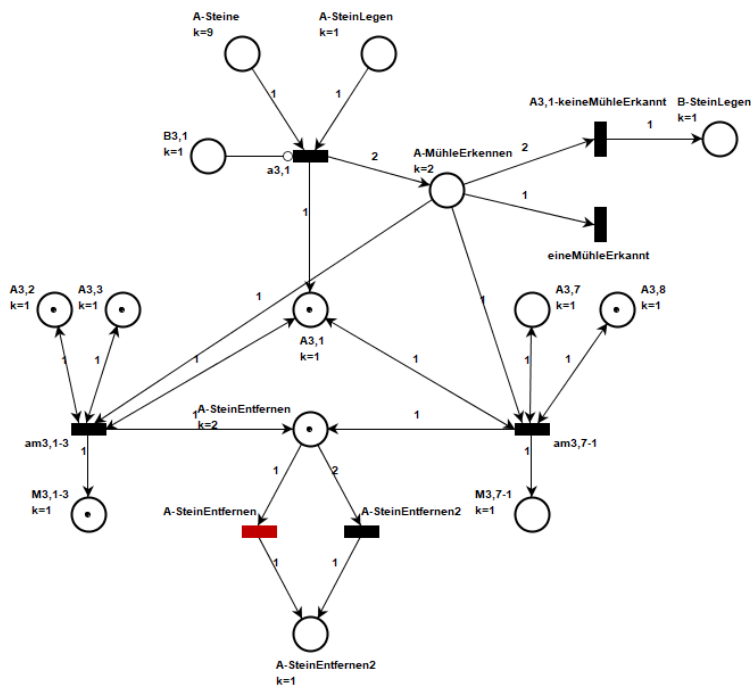


Abbildung 4.29: Fall 2, Schritt 2: Eine Mühle wurde geschlossen, der Abschnitt zum Entfernen eines Steins beginnt.

Die letzte Fallmöglichkeit besteht darin, dass keine Mühle geschlossen wurde (Abb. 4.30). Hierbei ist die einzige aktivierte Transition  $A3,1$ -keineMühleErkannt und nach dem Schalten ist Spieler B an der Reihe.

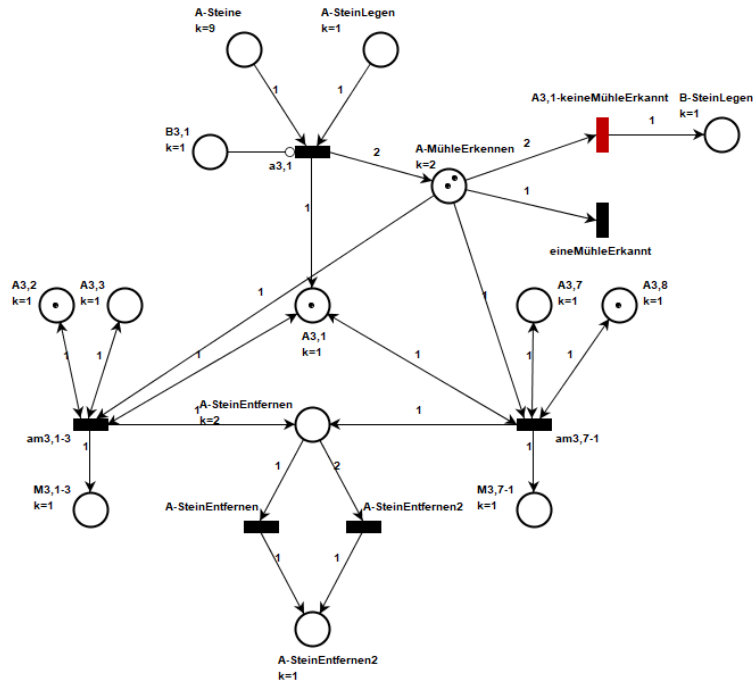


Abbildung 4.30: Fall 3: Es wurde keine Mühle erkannt, Übergang zum Zug von Spieler B.

Die vorgestellte Modellierungsmöglichkeit fügt dem gesamten Modell 49 weitere Transitionen hinzu und erhöht die Gesamtzahl damit auf 1435.

#### 4.4.2 Stein aus einer Mühle entfernen

Einige Turnierregeln erlauben das Entfernen eines gegnerischen Steins aus einer Mühle, wenn kein anderer Stein entfernt werden kann. Um diese Möglichkeit zu modellieren, können die Transitionen und Stellen zum Entfernen eines Steins verdoppelt werden. Ist z.B. die Stelle A-SteinEntfernen belegt, wird in einem ersten Schritt versucht, einen Stein zu entfernen, der nicht in einer Mühle ist. Ist dies nicht möglich, wird die Transition A-SteinEntfernenUnmöglich geschaltet, die aber nicht wie sonst Spieler B an die Reihe kommen lässt, sondern eine Marke in die Stelle A-SteinEntfernen2 legt. Von hier aus kann dann jeder beliebige gegnerische Stein entfernt werden.

Abb. 4.31 zeigt die Ausgangssituation für den Fall, dass Spieler A einen Stein entfernen darf und sich alle Steine von Spieler B in Mühlen befinden.



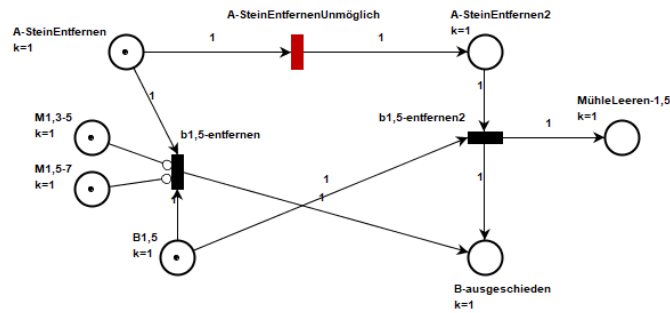


Abbildung 4.31: Fall 1: Alle Steine von Spieler B befinden sich in Mühlen.

Sobald die Transition A-SteinEntfernenUnmöglich geschaltet wurde, ergibt sich die in Abb. 4.32 dargestellte Situation. Der Stein von Spieler B auf Feld 1,5 kann entfernt werden, obwohl er sich in einer Mühle befindet.

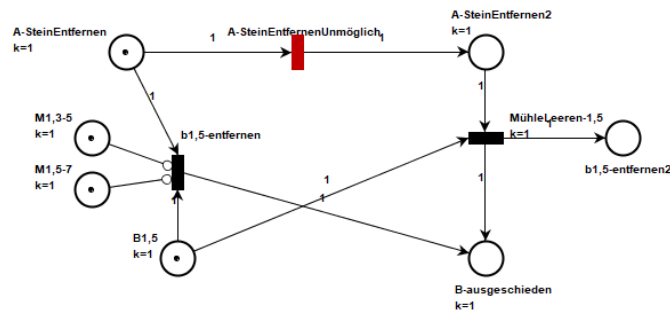


Abbildung 4.32: Ein gegnerischer Stein kann aus einer Mühle entfernt werden.

Durch die höhere Priorität der  $f_{i,j}$ -entfernen-Transitionen gegenüber den F-SteinEntfernenUnmöglich-Transitionen wird sichergestellt, dass erst Steine entfernt werden, die sich nicht in Mühlen befinden (Abb. 4.33).

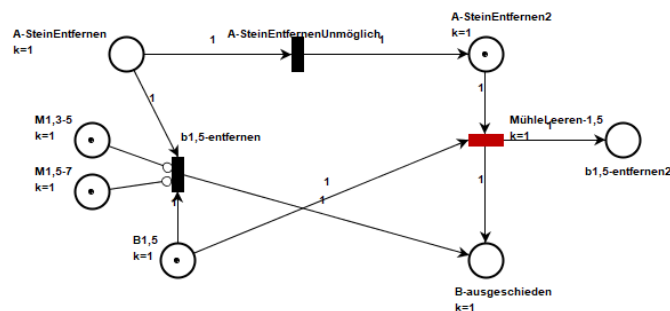


Abbildung 4.33: Fall 2: Der gegnerische Stein befindet sich nicht in einer Mühle und wird normal entfernt.

Diese Möglichkeit der Modellierung verdoppelt die Transitionen zum Entfernen von Steinen und fügt dadurch 48 weitere Transitionen hinzu.

# Kapitel 5

## Fazit und Ausblick

Während PIPE sich durch den Simulationsmodus sehr gut dafür eignet, Teilabläufe in größeren Systemen zu prüfen, ist es für die vollständige Modellierung eher nicht geeignet. Zum Einen gibt es keine Möglichkeiten, die Darstellung des Modells übersichtlicher zu machen. Zum Anderen traten bei der Verwendung von PIPE häufig Fehler beim Laden von Dateien auf. Wie Abb. 5.1 zeigt, kann es beim Laden dazu kommen, dass Stellen direkt durch Kanten verbunden werden und die Transition dazwischen allein steht. Diese Fehler können bei jedem Neustart wieder auftreten und müssen jedes Mal per Hand entfernt werden. Des Weiteren traten beim Wechsel in den Simulationsmodus bei komplexeren Modellen manchmal Fehler auf (siehe Abb. 5.2), die durch `NullPointerException`s in der Anwendung verursacht wurden. Daher wird für eine komplexe Modellierung entweder die Verwendung einer anderen Software oder das Testen anderer, evtl. stabilerer, PIPE-Versionen empfohlen. Die verwendete Version v4.3.0 ist die aktuellste Version der ursprünglichen PIPE-Website vom Imperial College of Science, Technology and Medicine in London, die aber seit 2013 nicht mehr aktualisiert wird. Da PIPE frei erweiterbar ist, lassen sich auch neuere Versionen finden, z.B. von Tattersall (2016).

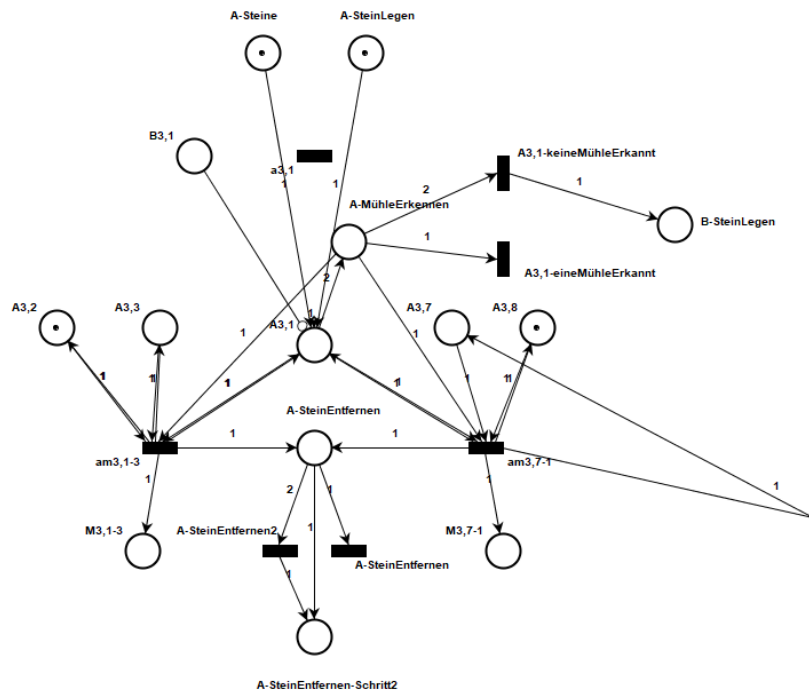


Abbildung 5.1: Fehler beim Öffnen von Dateien: Stellen werden durch Kanten verbunden.

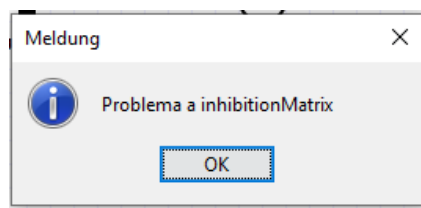


Abbildung 5.2: Fehlermeldung beim Start des Simulationsmodus.

Um die Modellierung zu erweitern, könnten in einer Fortführung dieser Arbeit die im vierten Kapitel angerissenen Sonderfälle genauer betrachtet und in die Modellierung integriert werden. Für beide Modellierungsansätze wurden u.A. die Netzabschnitte zum Entfernen von Steinen verändert. Dies müsste in einer genaueren Betrachtung kombiniert werden.

Des Weiteren wurden Spiel-Strategien bisher nicht betrachtet. Alle Stellen zum Setzen, Verschieben, Springen und Entfernen von Steinen haben die innerhalb ihrer Gruppe zugewiesene gleiche Priorität und werden bei Aktivierung zufällig gefeuert. Das Modell könnte dahingehend erweitert werden, dass z.B. getestet wird, ob eine Mühle geschlossen werden kann und diese dann mit Priorität geschlossen wird.

Ein vollständiges Modell könnte z.B. dazu genutzt werden, um das Spiel zu erlernen. Besonders für Anfänger kann es hilfreich sein, direkt zu sehen, welche Zugmöglichkeiten bestehen. Eine weitere Möglichkeit ist es, mit Hilfe des Modells Strategien zu entwickeln. Mit wenig Aufwand können unterschiedliche Spielsituationen und mögliche Folgen von Spielzügen getestet werden.

Die Komplexität der Modellierung kann aber auch auf verschiedene Arten vereinfacht werden. Gefärbte Petri-Netze (Jensen und Kristensen (2009)) eignen sich hierfür besonders. Hier können Marken verschiedener „Farben“ oder Typen verwendet werden, die sich Stellen und Transitionen teilen, wobei die Transitionen unter unterschiedlichen Bedingungen feuern können. Z.B. kann eine Transition feuern, wenn sich zwei blaue oder eine rote Marke in ihr befinden. Durch diese Art der Modellierung können z.B. die zwei Spielbrett kopien entfallen, da jeder Spieler seine eigene Token-Farbe bekommt. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, z.B. alle Transitionen zum Verschieben von Steinen zu einer Transition zusammenzufassen. Für jedes Spielfeld könnte dann eine unterschiedlich gefärbte Marke verarbeitet werden. Eine mögliche Software für die Modellierung gefärbter Petri-Netze ist CPN Tools (*CPN Tools* (o. J.)).

Eine weitere Möglichkeit, die einfach umsetzbar ist, aber nur einen Effekt auf die Übersichtlichkeit hat, ist die optische Unterscheidung von Spielfeld-Stellen und spielsteuernden Stellen. Durch die Verwendung einer Anwendung, die beispielsweise eine Einfärbung der Stellen erlaubt, könnte die Übersichtlichkeit der Modellierung verbessert werden, indem Spielfeld-Stellen andersfarbig dargestellt werden als spielsteuernde Stellen.

Eine andere Möglichkeit zur optischen Vereinfachung besteht darin, bei der Simulation nur die gerade aktiven Transitionen darzustellen. Kipp (2018) stellt in seiner Bachelorarbeit eine Möglichkeit vor, PIPE 5.0.2 so zu verändern, dass nur aktivierte Transitionen dargestellt werden. Hierdurch wäre es im Fall von Mühle einfach zu erkennen, in welcher Phase sich das Spiel befindet. Trotzdem wären z.B. in einer Phase, in der ein Spieler mit seinen Steinen springen kann, potentiell mehrere hundert Transitionen gleichzeitig aktiv.

Die Modellierung von simpel erscheinenden Abläufen, wie z.B. bestimmten Brettspielen, kann bei der Verwendung von Stellen-Transitions-Systemen bereits so komplex werden, dass das Modell durch die hohe Anzahl der Kanten nicht mehr erkennbar auf Papier dargestellt werden kann. Zudem ist der Modellierungsaufwand sehr hoch, ebenso wie die Fehleranfälligkeit bei der Erstellung des Modells. Petri-Netze, die nur Ausschnitte zeigen, können dabei helfen, solche komplexen Modellierungen auf ihre Korrektheit zu prüfen. Gerade wenn das zu modellierende System eine hohe Wiederholung von parallelen Abläufen aufweist, wie beispielsweise die vielen Transitionen zum Springen bei Mühle, kann das korrekte Verhalten an einem Weg gezeigt und auf alle anderen übertragen werden.

# Literaturverzeichnis

- Araújo, M. & Roque, L. (2009). Modeling Games with Petri Nets. In *Digra conference*.
- Best, E. & Wimmel, H. (2013). Structure theory of petri nets. In *Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency VII* (S. 162–224). Springer.
- CPN Tools*. (o. J.). <https://cpntools.org/>. (Letzter Aufruf: 17.07.2021, Verantwortliche: Westergaard, Verbeek)
- Elembis. (2006). *Nine Men's Morris board*. [https://de.wikipedia.org/wiki/Mühle\\_\(Spiel\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Mühle_(Spiel)). (Letzter Aufruf: 17.07.2021)
- Jensen, K. & Kristensen, L. M. (2009). *Coloured Petri nets: modelling and validation of concurrent systems*. Springer Science & Business Media.
- Kipp, K. (2018). *Ausblenden nicht-aktivierter Transitionen im Petri-Netz-Werkzeug PIPE*.
- Kuske, S. (2020). *Petri-Netze Wintersemester 2020/2021*.
- Petri, C. A. (1962). Kommunikation mit Automaten.
- Petri Nets World*. (o. J.). <http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/PetriNets/index.php>. (Letzter Aufruf: 17.07.2021, aktuell Verantwortliche: Haustermann, Moldt, Wagner)
- PIPE - Platform Independent Petri net Editor 2*. (o. J.). <http://pipe2.sourceforge.net/>. (Letzter Aufruf: 17.07.2021)
- Priese, L. & Wimmel, H. (2008). *Petri-Netze*. Springer-Verlag.
- Reisig, W. (2010). *Petrinetze: Modellierungstechnik, Analysemethoden, Fallstudien*. Springer-Verlag.
- Rozenberg, G. & Engelfriet, J. (1996). Elementary net systems. In *Advanced course on petri nets* (S. 12–121).
- Scheetz, B. (2016). *Werkzeughasierte Modellierung von Spielen mit Petrinetzen*.
- Starke, P. H. (1990). *Analyse von Petri-Netz-Modellen* (Bd. 6). Springer.
- Tattersall, S. (2016). *PIPE 5*. <https://sarahattersall.github.io/PIPE/>. (Letzter Aufruf: 18.07.2021)

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Das Mühle-Spielbrett . . . . .	6
3.1	Die 24 Felder des Spielbretts als Stellen für Spieler A . . . . .	9
3.2	Das Spielbrett von Spieler A mit belegten Feldern . . . . .	9
3.3	Ein möglicher Spielzug als S/T-System. $k$ gibt die Kapazität einer Stelle an.	10
3.4	Spieler A hat bereits alle seine Steine abgelegt. Die Phase zum Setzen von Steinen wird übersprungen. . . . .	10
3.5	Erkennen einer Mühle mittels einer “M”-Stelle . . . . .	11
3.6	Wenn keine Mühle erkannt wurde, endet der Zug von Spieler A und Spieler B ist an der Reihe. . . . .	12
3.7	Schema 1 zum Verschieben von Spielsteinen innerhalb eines Quadrats . . .	12
3.8	Schema 2 zum Verschieben von Spielsteinen innerhalb eines Quadrats . . .	13
3.9	Schema zum quadratübergreifenden Verschieben von Spielsteinen . . . . .	13
3.10	Schema zum Springen von Spielsteinen . . . . .	13
3.11	Schema zum Springen von Spielsteinen . . . . .	14
3.12	Schema 1 zum Entfernen von Spielsteinen für Spieler A . . . . .	15
3.13	Schema 2 zum Entfernen von Spielsteinen für Spieler A . . . . .	15
3.14	Schema 1 zum Öffnen von Mühlen und Leeren der zugehörigen “M”-Stellen	16
3.15	Schema 2 zum Öffnen von Mühlen und Leeren der zugehörigen “M”-Stellen	16
3.16	Enthält eine der F-ausgeschieden-Stellen sieben Marken, kann die entsprechende -gewinnt-Transition schalten und der Spieler gewinnt . . . . .	17
3.17	Übersicht über die Modellierung eines Spielzugs für Spieler A . . . . .	18
4.1	PIPE . . . . .	21
4.2	Wechsel in den Simulationsmodus . . . . .	22
4.3	Feuern einer zufälligen aktivierten Transition. . . . .	23
4.4	Hier ist es möglich, einen Stein auf dem Spielbrett abzulegen. . . . .	24
4.5	In dieser Situation kann der Stein nicht auf dem Feld abgelegt werden, da $B_{i,j}$ bereits belegt ist. . . . .	24
4.6	$ML_{-i,j}$ ist belegt, aber $M_{i,j-(j+2)}$ ist nicht geschlossen . . . . .	25
4.7	$ML_{-i,j-2}$ ist belegt, aber $M_{i,(j-2)-j}$ ist nicht geschlossen . . . . .	25
4.8	$ML_{-i,j}$ ist belegt und $M_{i,j-(j+2)}$ ist geschlossen . . . . .	25
4.9	$ML_{-i,j-2}$ ist belegt und $M_{i,(j-2)-j}$ ist geschlossen . . . . .	26

4.10	Ausgangssituation: Spieler A ist am Zug und hat noch Steine abzulegen, daher ist $a_{i,j}$ aktiviert. . . . .	27
4.11	Spieler A ist am Zug und hat bereits alle seine Steine abgelegt, daher kann er zum Verschieben von Steinen wechseln . . . . .	28
4.12	A-SteinLegenUnmöglich wurde gefeuert, Spieler A kann seinen Stein von $A_{i_2,j_2}$ zu $A_{i_2,j_2+1}$ verschieben . . . . .	28
4.13	Erreichbarkeitsgraph . . . . .	29
4.14	Zu Beginn des Abschnitts kann nur die Transition $a_{2,2}-a_{3,2}$ schalten. . . . .	30
4.15	Im zweiten Schritt wird getestet, ob sich eine Mühle geöffnet hat. . . . .	31
4.16	Im dritten Schritt wird die neu geschlossene Mühle erkannt . . . . .	32
4.17	Der Stein von Spieler B befindet sich in einer Mühle und kann nicht entfernt werden. . . . .	33
4.18	Erreichbarkeitsgraph der Schaltfolge. . . . .	34
4.19	In diesem Fall befindet sich der Stein von Spieler B nicht in einer Mühle und kann entfernt werden. . . . .	35
4.20	Spieler A hat weniger als sieben Steine von Spieler B vom Brett entfernt. . . . .	36
4.21	Spieler A hat sieben Steine von Spieler B vom Brett entfernt. . . . .	37
4.22	Ausgangssituation: Durch Spieler A und Spieler B belegte Felder . . . . .	37
4.23	Spieler B ist vollständig blockiert. . . . .	38
4.24	Spieler B hat eine Zugmöglichkeit. . . . .	39
4.25	Ausgangssituation: Zwei Mühlen werden mit einem abgelegten Stein geschlossen. . . . .	40
4.26	Die Transitionen zum Schließen der Mühlen sind aktiv und werden nacheinander geschaltet. . . . .	41
4.27	Fall 1: Es wurden zwei Mühlen geschlossen. . . . .	42
4.28	Fall 2, Schritt 1: Eine Mühle wurde geschlossen, das zweite Token wird entfernt. . . . .	43
4.29	Fall 2, Schritt 2: Eine Mühle wurde geschlossen, der Abschnitt zum Entfernen eines Steins beginnt. . . . .	43
4.30	Fall 3: Es wurde keine Mühle erkannt, Übergang zum Zug von Spieler B. . . . .	44
4.31	Fall 1: Alle Steine von Spieler B befinden sich in Mühlen. . . . .	45
4.32	Ein gegnerischer Stein kann aus einer Mühle entfernt werden. . . . .	45
4.33	Fall 2: Der gegnerische Stein befindet sich nicht in einer Mühle und wird normal entfernt. . . . .	45
5.1	Fehler beim Öffnen von Dateien: Stellen werden durch Kanten verbunden. . . . .	47
5.2	Fehlermeldung beim Start des Simulationsmodus. . . . .	47

# Weitere Simulationsfälle

## Erkennen einer Mühle

Für diese Simulation wurden die Felder A3,1, A3,2, A3,3 und A-MühleErkennen mit Marken belegt. Dadurch wird die Transition am3,1-3 aktiviert (Abb. 3) und es kann eine geschlossene Mühle erkannt werden.

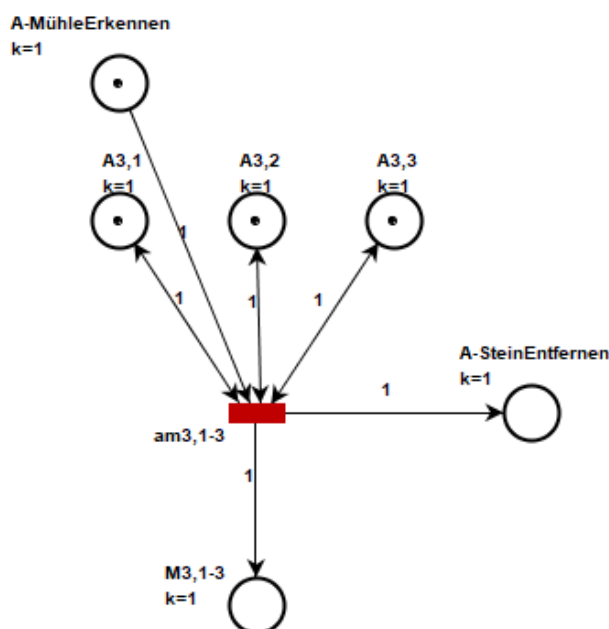


Abbildung 3: Eine Mühle wird geschlossen

Nachdem die Mühle geschlossen wurde, sind die Stellen M3,1-3 und A-SteinEntfernen belegt und der Netzabschnitt zum Entfernen eines Steins beginnt. Im nächsten Zug bleibt die Mühle geschlossen (Abb. 4). Um einen weiteren Stein des Gegners entfernen zu können, muss die Mühle erst wieder geöffnet (Abschnitt 3.7) und neu geschlossen werden.



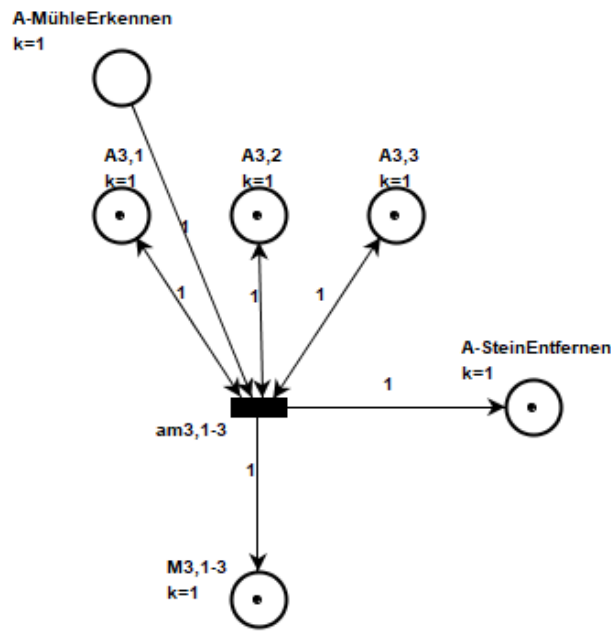


Abbildung 4: Eine bereits geschlossene Mühle

## Steine verschieben

Eine Transition zum Verschieben eines Steins muss mehrere Bedingungen erfüllen, um aktiviert zu werden. Abb. 5 zeigt dies beispielhaft für Spieler A. Die Stelle A-P2 muss belegt sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Spieler seinen Zug beginnt und bereits alle seine Steine auf dem Brett abgelegt hat. Das Feld, von dem aus der Stein verschoben wird, muss belegt sein. Und das angrenzende Feld darf weder von Spieler A noch von Spieler B belegt sein.

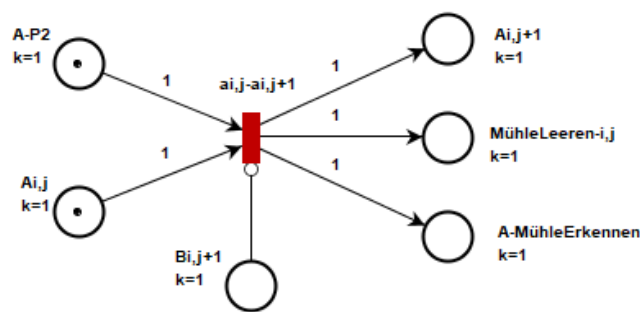


Abbildung 5: Verschieben eines Steins von  $A_{i,j}$  zu  $A_{i,j+1}$

Wurde die aktivierte Transition gefeuert, ergibt sich ein Bild wie in Abb. 6.

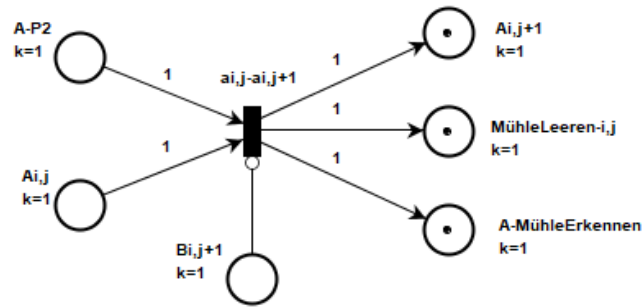


Abbildung 6: Ausschnitt nach dem Verschieben eines Steins

Ist das Feld, auf das gezogen werden soll, bereits belegt, kann die Transition nicht feuern (Abb. 7). Dies gilt unabhängig davon, welcher Spieler das Feld belegt hat.

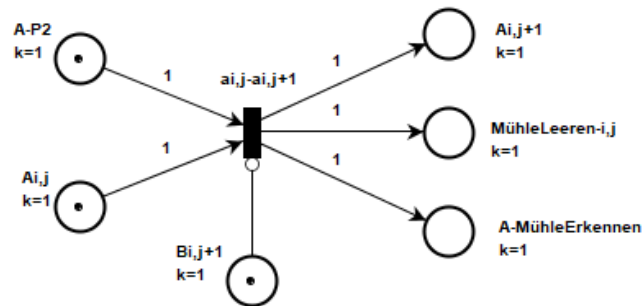


Abbildung 7: Spieler B belegt das Feld, auf das gezogen werden soll

## Springen

Beim Springen mit Steinen gelten die gleichen Voraussetzungen wie beim Verschieben. Zusätzlich muss die A/B-ausgeschieden-Stelle des Spielers genau sechs Marken enthalten. Ist dies nicht der Fall (Abb. 8), können Steine nur verschoben werden. Hat ein Spieler nur noch drei Steine auf dem Brett und damit sechs Steine in seiner A/B-ausgeschieden-Stelle, werden die Transitionen zum Springen aktiviert (Abb. 9).

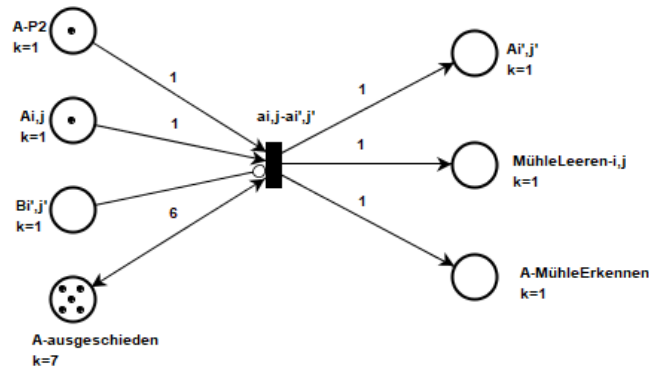


Abbildung 8: Voraussetzungen zum Springen nicht erfüllt

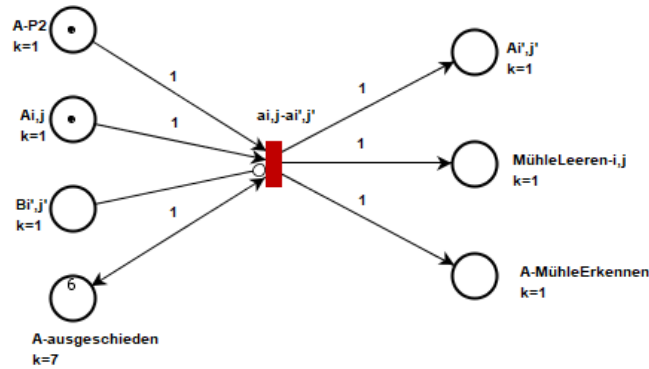


Abbildung 9: Voraussetzungen zum Springen erfüllt

## Steine entfernen

Abbildung 10 zeigt beispielhaft eine aktivierte Transition zum Entfernen eines Spielsteins.

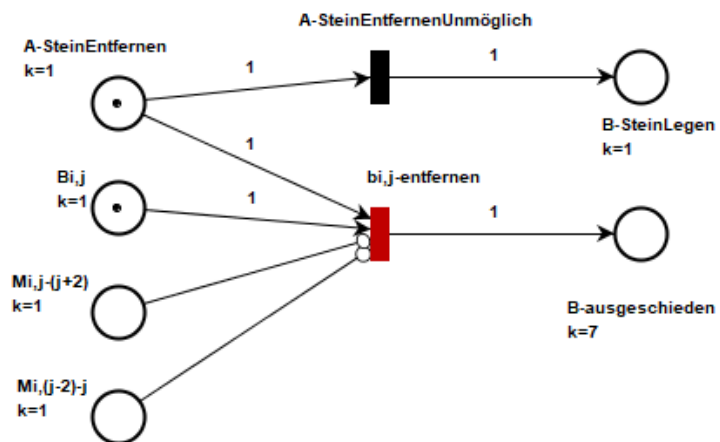


Abbildung 10: Beispiel einer aktivierten Transition zum Entfernen eines Spielsteins

Nachdem die Transition gefeuert wurde, sieht der Ausschnitt aus wie in Abbildung 11.

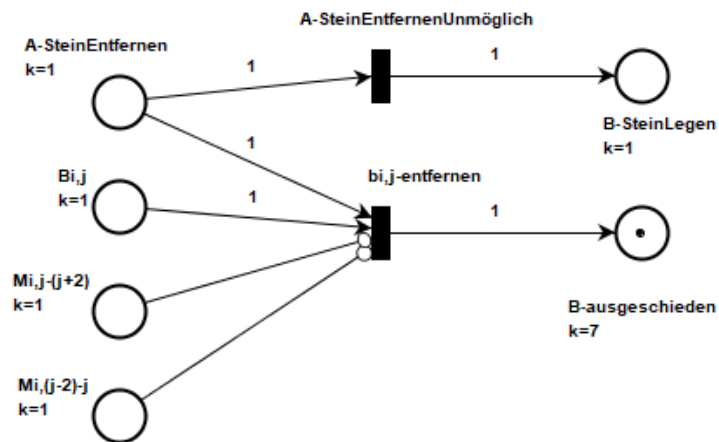


Abbildung 11: Ausschnitt nach Feuern der Transition  $bi,j$ -entfernen

Ist der zu entfernende Stein des Gegners Teil einer Mühle, so kann er nicht entfernt werden. Trifft dies auf alle Steine des Gegners zu, ist stattdessen die Transition  $A$ -SteinEntfernenUnmöglich aktiviert, siehe Abb. 12.

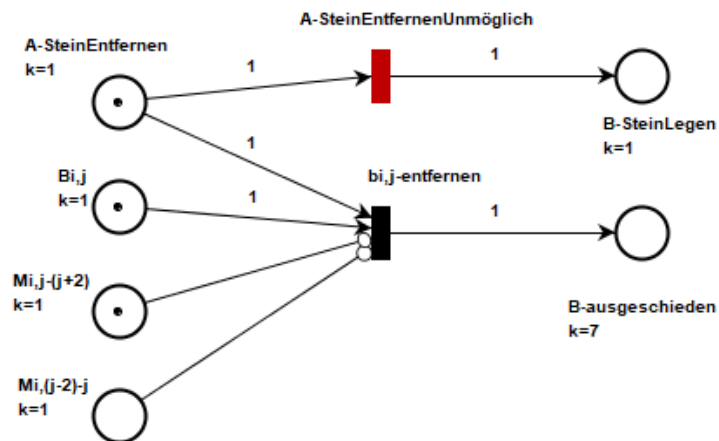


Abbildung 12: Beispiel einer nicht-aktivierten Transition zum Entfernen eines Spielsteins

Wurde die Transition gefeuert, ist Spieler  $B$  an der Reihe und keiner seiner Steine wurde entfernt (Abb. 13).

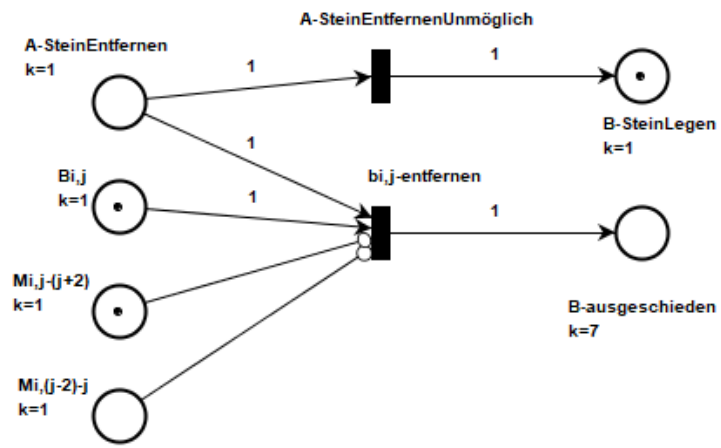


Abbildung 13: Ausschnitt nach Feuern der Transition A-SteinEntfernenUnmöglich